

Γεωμετρία Γενικής Παιδείας Β' Λυκείου 2001

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

Ζήτημα 1ο

- A1.** Να αποδείξετε ότι, σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του, ισούται με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα.

Μονάδες 6,5

- A2.** Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β**, έτσι ώστε να προκύπτει ισότητα.

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ

$$(\hat{A} = 90^\circ)$$

και ΑΔ το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. AB^2	1. $AB^2 + B\Gamma^2$
β. $A\Gamma^2$	2. $\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$
γ. $\frac{AB^2}{A\Gamma^2}$	3. $\frac{\Gamma\Delta}{B\Delta}$
	4. $B\Gamma \cdot B\Delta$
	5. $B\Gamma^2 - AB^2$
	6. $AB \cdot B\Gamma$

Μονάδες 6

- Β.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για καθένα από τα ερωτήματα **Β1** και **Β2**.

Δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ

$$(\hat{A} = 90^\circ)$$

με ύψος ΑΔ, για το οποίο έχουμε $B\Delta = 1$ και $B\Gamma = 3$.

- Β1.** Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΔ είναι:

α. 2 **β.** $\sqrt{3}$ **γ.** $\sqrt{2}$ **δ.** $3\sqrt{2}$

Μονάδες 6,5

- Β2.** Το μήκος της πλευράς ΑΒ είναι:

α. $\sqrt{3}$ **β.** 3 **γ.** $\sqrt{2}$ **δ.** $\sqrt{5}$

Μονάδες 6

Ζήτημα 2ο

Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι $AB = 6$, $BΓ = 12$ και $ΓΑ = 8$.

- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι αμβλυγώνιο.

Μονάδες 7

- β. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ.

Μονάδες 9

- γ. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της διαμέσου ΑΜ στην πλευρά ΒΓ.

Μονάδες 9

Ζήτημα 3ο

Θεωρούμε τρεις διαδοχικές γωνίες

$$\hat{xOy} \quad \hat{yOz} \quad \hat{zOx}$$

έτσι ώστε:

$$\hat{xOy} = \hat{yOz} = 150^\circ$$

Στις ημιευθείες Ox , Oy , Oz παίρνουμε τα σημεία A , B , Γ αντίστοιχα έτσι ώστε $OA=2$, $OB=4$ και $O\Gamma=6$.

- α. Να υπολογίσετε το εμβαδό $E_{O\Gamma A}$ του τριγώνου $O\Gamma A$.

Μονάδες 12

- β. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών:

$$\frac{E_{OAB}}{E_{OB\Gamma}}$$

Μονάδες 13

Ζήτημα 4ο

Δίνεται ημικύκλιο κέντρου O και διαμέτρου $AB = 2R$. Στην προέκταση του AB προς το B , θεωρούμε ένα σημείο Γ , τέτοιο ώστε $B\Gamma = 2R$. Από το Γ φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓE του ημικυκλίου. Η εφαπτομένη του ημικυκλίου στο σημείο A τέμνει την προέκταση του τμήματος ΓE στο σημείο Δ .

- α. Να αποδείξετε ότι:

$$\Gamma E = 2\sqrt{2} R .$$

Μονάδες 5

- β. Να αποδείξετε ότι $\Gamma A \cdot \Gamma O = \Gamma \Delta \cdot \Gamma E$.

Μονάδες 10

- γ. Να υπολογίσετε το τμήμα $\Gamma \Delta$ συναρτήσει του R .

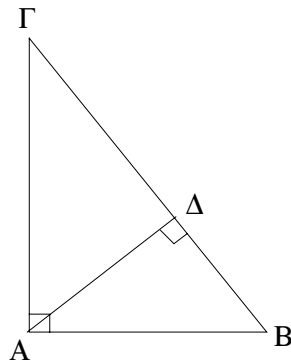
Μονάδες 5

- δ. Να υπολογίσετε το άθροισμα των εμβαδών των μικτόγραμμων τριγώνων $B\Gamma E$ και $A\Delta E$ συναρτήσει του R .

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Ζήτημα 1ο



A1. Θεώρημα 9.4, σελίδα 211 σχολικού βιβλίου.

A2. $\alpha \leftrightarrow 4$
 $\beta \leftrightarrow 5$
 $\gamma \leftrightarrow 2$

B1. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ έχουμε ότι:

$$A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$$

κι επειδή:

$$B\Delta = 1 \quad \text{και} \quad \Delta\Gamma = B\Gamma - B\Delta = 3 - 1 = 2$$

προκύπτει ότι:

$$A\Delta^2 = 1 \cdot 2 = 2$$

οπότε:

$$A\Delta = \sqrt{2}$$

Άρα η σωστή απάντηση είναι η (γ).

B2. Ισχύει επίσης ότι:

$$AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma$$

κι επειδή:

$$B\Delta = 1 \quad \text{και} \quad B\Gamma = 3$$

προκύπτει ότι:

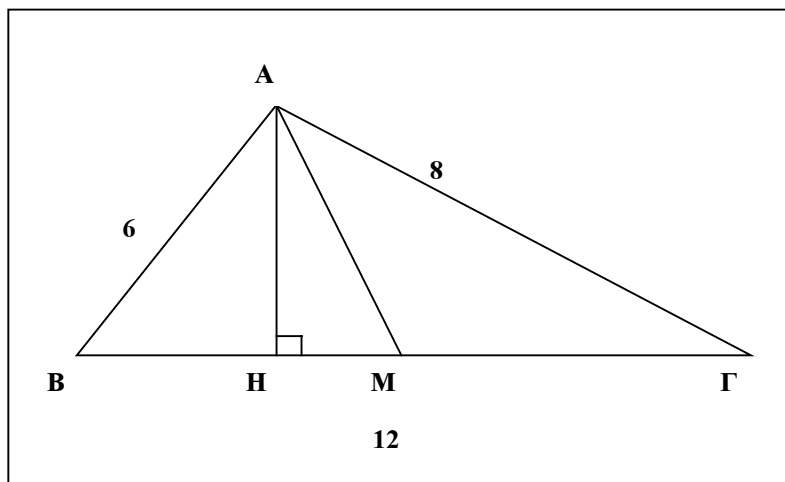
$$AB^2 = 1 \cdot 3 = 3$$

οπότε:

$$AB = \sqrt{3}$$

Άρα η σωστή απάντηση είναι η (α).

Ζήτημα 2ο



α. Είναι:

$$\begin{aligned} AB^2 &= 6^2 = 36 \\ B\Gamma^2 &= 12^2 = 144 \\ A\Gamma^2 &= 8^2 = 64 \quad \text{και} \\ AB^2 + A\Gamma^2 &= 36 + 64 = 100 \end{aligned}$$

Οπότε:

$$B\Gamma^2 > AB^2 + A\Gamma^2$$

Επομένως το τρίγωνο ABΓ είναι αμβλυγώνιο στο A.

β. Από το πρώτο θεώρημα των διαμέσων έχουμε:

$$AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}$$

Αντικαθιστούμε $AB = 6$, $B\Gamma = 12$ και $A\Gamma = 8$ και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} 6^2 + 8^2 &= 2AM^2 + \frac{12^2}{2} \Leftrightarrow \\ 36 + 64 &= 2AM^2 + 72 \Leftrightarrow \\ 2AM^2 &= 28 \Leftrightarrow \\ AM^2 &= 14 \Leftrightarrow \\ AM &= \sqrt{14} \end{aligned}$$

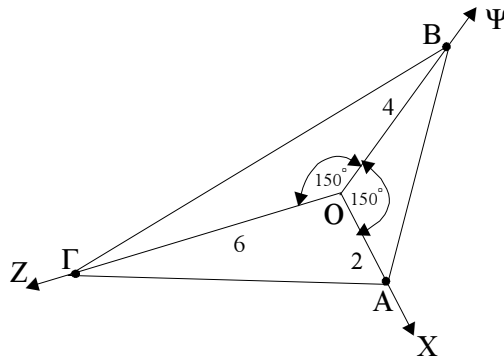
γ. Αν AH είναι το ύψος του τριγώνου από το A, τότε η προβολή της διαμέσου AM στη BΓ είναι το τμήμα HM. Σύμφωνα με το δεύτερο θεώρημα των διαμέσων έχουμε:

$$A\Gamma^2 - AB^2 = 2B\Gamma \cdot HM$$

Αντικαθιστούμε $AB = 6$, $B\Gamma = 12$ και $A\Gamma = 8$ και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} 8^2 - 6^2 &= 2 \cdot 12 \cdot HM \Leftrightarrow \\ 64 - 36 &= 24 \cdot HM \Leftrightarrow \\ 28 &= 24 \cdot HM \Leftrightarrow \\ HM &= \frac{28}{24} = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

Ζήτημα 3ο



Είναι:

$$\widehat{X\hat{O}Z} = 360^\circ - (\widehat{X\hat{O}\Psi} + \widehat{\Psi\hat{O}Z}) = 360^\circ - (150^\circ + 150^\circ) = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$$

α. Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΑ υπολογίζεται σύμφωνα με τον τύπο

$$E_{\text{ΟΓΑ}} = \frac{1}{2} \text{OA} \cdot \text{ΟΓ} \cdot \eta\mu(\widehat{X\hat{O}Z}) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 \cdot \eta\mu 60^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

β. Είναι:

$$E_{\text{ΟΑΒ}} = \frac{1}{2} \text{OA} \cdot \text{OB} \cdot \eta\mu(\widehat{X\hat{O}\Psi}) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \eta\mu 150^\circ = 4 \cdot \eta\mu(180^\circ - 30^\circ) = 4 \cdot \eta\mu 30^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$E_{\text{ΟΒΓ}} = \frac{1}{2} \text{OB} \cdot \text{ΟΓ} \cdot \eta\mu(\widehat{\Psi\hat{O}Z}) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \eta\mu 150^\circ = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

Άρα

$$\frac{E_{\text{ΟΑΒ}}}{E_{\text{ΟΒΓ}}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Δεύτερος τρόπος για το ερώτημα 3β

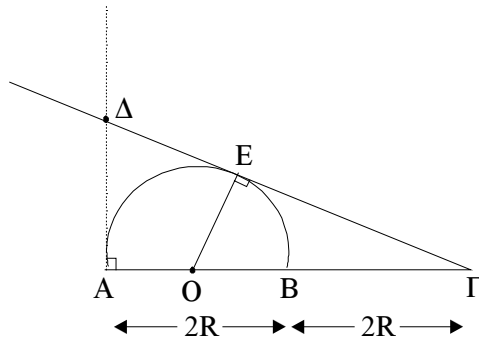
Επειδή τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΒΓ έχουν:

$$\widehat{A\hat{O}B} = \widehat{B\hat{O}\Gamma} = 150^\circ$$

προκύπτει ότι:

$$\frac{E_{\text{ΟΑΒ}}}{E_{\text{ΟΒΓ}}} = \frac{\text{OA} \cdot \text{OB}}{\text{OB} \cdot \text{ΟΓ}} = \frac{\text{OA}}{\text{ΟΓ}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Ζήτημα 4ο



α. Ισχύει ότι:

$$ΓΕ^2 = ΓΒ \cdot ΓΑ$$

Είναι:

$$ΓΒ = 2R \quad \text{και} \quad ΓΑ = ΓΒ + ΒΑ = 2R + 2R = 4R$$

Επομένως:

$$ΓΕ^2 = 2R \cdot 4R = 8R^2$$

Άρα:

$$ΓΕ = \sqrt{8R^2} = R\sqrt{8} = 2R\sqrt{2}$$

β. Επειδή οι ΓΕ και ΑΔ εφάπτονται του ημικυκλίου συνεπάγεται ότι:

$$ΟΕ \perp ΓΔ \quad \text{και} \quad ΑΔ \perp ΑΓ$$

οπότε τα τρίγωνα ΟΕΓ και ΓΑΔ είναι ορθογώνια στο Ε και Α αντιστοίχως. Ακόμα, έχουν κοινή την γωνία Γ, επομένως είναι όμοια. Δηλαδή:

$$\triangle ΕΓΟ \approx \triangle ΑΓΔ$$

οπότε:

$$\frac{ΑΓ}{ΕΓ} = \frac{ΓΔ}{ΓΟ}$$

Άρα:

$$ΓΑ \cdot ΓΟ = ΓΔ \cdot ΓΕ$$

γ. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΟΓ έχουμε:

$$\begin{aligned} ΓΕ^2 &= ΟΓ^2 - ΕΟ^2 = (3R)^2 - R^2 = \\ &= 9R^2 - R^2 = 8R^2 \end{aligned}$$

Άρα:

$$ΓΕ = 2R\sqrt{2}$$

Σύμφωνα με το συμπέρασμα του προηγούμενου ερωτήματος (β) έχουμε:

$$ΓΑ \cdot ΓΟ = ΓΔ \cdot ΓΕ$$

και με αντικατάσταση των:

$$ΓΑ = 4R, \quad ΓΟ = 3R \quad \text{και} \quad ΓΕ = 2R\sqrt{2}$$

βρίσκουμε:

$$4R \cdot 3R = \Gamma\Delta \cdot 2R\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Gamma\Delta = \frac{12R^2}{2R\sqrt{2}} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \frac{6R}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}R$$

- δ.** Το ζητούμενο άθροισμα Ε των εμβαδών των μικτογράμμων τριγώνων ΒΓΕ και ΑΔΕ ισούται με την διαφορά του εμβαδού του ημικυκλίου με διάμετρο ΑΒ από το εμβαδό του τριγώνου ΑΔΓ. Έτσι έχουμε:

$$E = \frac{1}{2} \text{ΑΓ} \cdot \text{ΑΔ} - \frac{1}{2} \pi \left(\frac{\text{ΑΒ}}{2} \right)^2$$

Όμως από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{ΑΔ}^2 &= \text{ΔΓ}^2 - \text{ΑΓ}^2 = (3\sqrt{2}R)^2 - (4R)^2 = \\ &= 18R^2 - 16R^2 = 2R^2 \end{aligned}$$

Άρα:

$$\text{ΑΔ} = R\sqrt{2}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \cdot 4R \cdot R\sqrt{2} - \frac{1}{2} \pi \left(\frac{2R}{2} \right)^2 = \\ &= 2R^2\sqrt{2} - \frac{1}{2} \pi R^2 = \left(2\sqrt{2} - \frac{\pi}{2} \right) R^2 \end{aligned}$$

Δεύτερος τρόπος για τα ερωτήματα 4β, 4γ και 4δ

Τα τμήματα ΔΑ και ΔΕ είναι ίσα επειδή τα ΔΕ και ΔΑ είναι εφαπτόμενα του κύκλου. Έτσι αν θέσουμε ΔΑ = ΔΕ = x από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{ΔΓ}^2 &= \text{ΑΔ}^2 + \text{ΑΓ}^2 \Leftrightarrow (\text{ΔΕ} + \text{ΕΓ})^2 = \text{ΑΔ}^2 + \text{ΑΓ}^2 \Leftrightarrow \\ (x + 2\sqrt{2}R)^2 &= x^2 + (4R)^2 \Leftrightarrow x^2 + 8R^2 + 4\sqrt{2}xR = x^2 + 16R^2 \Leftrightarrow \\ 4\sqrt{2}xR &= 8R^2 \Leftrightarrow x = R\sqrt{2} \end{aligned}$$

Έτσι:

- 4β.**
- ΓΑ·ΓΟ = 4R·3R = 12R²
 - ΓΔ·ΓΕ = (ΓΕ + ΕΔ) ΓΕ = (2√2 R + √2 R)·2√2 R =
= 3√2 R·2√2 R = 12R²

Άρα:

$$\Gamma\text{Α} \cdot \Gamma\text{Ο} = \Gamma\text{Δ} \cdot \Gamma\text{Ε}$$

4γ.

$$\Gamma\text{Δ} = \Gamma\text{Ε} + \text{ΕΔ} = 2\sqrt{2}R + \sqrt{2}R = 3\sqrt{2}R$$

- 4δ** Το ζητούμενο άθροισμα Ε των εμβαδών των μικτογράμμων τριγώνων ΒΓΕ και ΑΔΕ ισούται με την διαφορά του εμβαδού του ημικυκλίου με διάμετρο ΑΒ από το εμβαδό του τριγώνου ΑΔΓ. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \text{ΑΓ} \cdot \text{ΑΔ} - \frac{1}{2} \pi \left(\frac{\text{ΑΒ}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4R \cdot R\sqrt{2} - \frac{1}{2} \pi R^2 = \\ &= 2R^2\sqrt{2} - \frac{1}{2} \pi R^2 = R^2 \left(2\sqrt{2} - \frac{1}{2} \pi \right) \end{aligned}$$