ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 99

Α2. α. Ψ

β. Σχολικό βιβλίο, σελ. 35

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 216

Α4. α. Λ, β. Λ, γ. Σ, δ. Σ, ε. Σ

Θέμα Β

Β1. $f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f'(x) = \frac{x^3+8}{x^3}$

x	$-\infty$	-2		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$+$	
f	↗	Τ.Μ	↘	‖	↗	

$x(x+2)$

f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -2]$ και $(0, +\infty)$

f γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 0)$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = -2$

το $f(-2) = -3$

Β2. $f''(x) = -\frac{24}{x^4}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	‖	$-$
f	⌒	‖	⌒

f κυρτή στο $(-\infty, 0)$ και

κοίλη στο $(0, +\infty)$

Β3. **Α' τρόπος** $\forall x \neq 0$ $f(x) - x = -\frac{4}{x^2}$

$\lim_{x \to -\infty}[f(x) - x] = 0$ και $\lim_{x \to +\infty}[f(x) - x] = 0$, άρα η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ και στο $+\infty$

Επίσης: • $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-4}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0$

$\Rightarrow$ η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

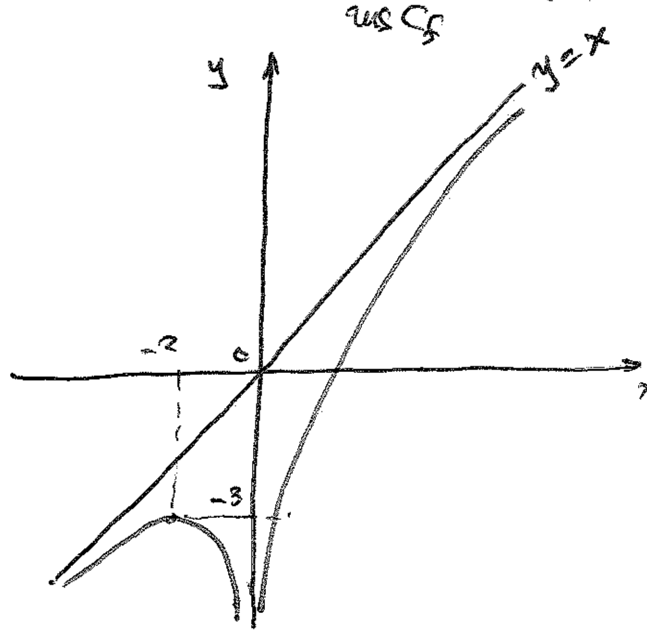
• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-4}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0$

$\Rightarrow$ η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

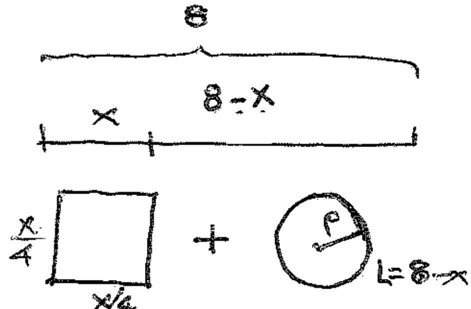
• $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty \Rightarrow$ η ευθεία $y=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

B4.



Θέμα Γ.

Γ1. Έχουμε:



περίμετρος: x. Περίμετρος $=8-x=2\pi\rho \Leftrightarrow \rho=\frac{8-x}{2\pi}$

$E(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{(8-x)^2}{4\pi},\ 0\le x\le 8$

$\Rightarrow E(x)=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}$

$,\ 0<x<8$

Γ2. $E'(x)=\frac{x}{8}-\frac{2(8-x)}{4\pi}=\frac{x}{8}-\frac{(8-x)}{2\pi}=\frac{(\pi+4)x-32}{8\pi},\ x\in(0,8)$

Έχουμε $E'(x)=0$, τότε $(\pi+4)x=32 \Leftrightarrow x=\frac{32}{\pi+4}$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων της E' και μονοτονίας

Της E

x	0		$\frac{32}{\pi+4}$		8
$E'(x)$		$-$	0	$+$	
$E(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Επειδή $E'\left(\frac{32}{\pi+4}\right)=0$ και η E αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $x_0=\frac{32}{\pi+4}$ άρα η E παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο για $x_0=\frac{32}{\pi+4}$ με $E\left(\frac{32}{\pi+4}\right)=\frac{16}{\pi+4}\ m^2$

Για $x=\frac{32}{\pi+4}$ η πλευρά του τετραγώνου είναι $a=\frac{x}{4}=\frac{8}{\pi+4}\ m.$

Ομοια, για $x=\frac{32}{\pi+4}$ η διάμετρος δ του κύκλου είναι:

$$\delta=2\rho=\cancel{2}\cdot\frac{8-\frac{32}{\pi+4}}{\cancel{2}\pi}=\frac{8\pi+\cancel{32}-\cancel{32}}{\pi(\pi+4)}=\frac{8}{\pi+4}\ m$$

Άρα, για $x=\frac{32}{\pi+4}$ η διάμετρος του κύκλου και η πλευρά του τετραγώνου είναι ίσες. με $\frac{8}{\pi+4}\ m.$

Γ3. Η E είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1=\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]$

Άρα $E(A_1)=\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim\limits_{x\to0^+}E(x)\right)=\left[\frac{16}{\pi+4},\frac{16}{\pi}\right)$

Επειδή $5\in E(A_1)$ τότε υπάρχει $x_0\in\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]$ τέτοιο ώστε $E(x_0)=5$. Επειδή η E είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]$ το $x_0\in\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]$ είναι μοναδικό.

Η E είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2=\left[\frac{32}{\pi+4},8\right)$

Άρα $E(A_2)=\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim\limits_{x\to8^-}E(x)\right)=\left[\frac{16}{\pi+4},4\right)$ διότι

$$\lim_{x\to8^-}E(x)=\lim_{x\to8^-}\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}=4$$

Επειδή $5\notin E(A_2)$ τότε δεν υπάρχει $x_0\in\left[\frac{32}{\pi+4},8\right)$ τέτοιο ώστε $E(x_0)=5$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x)=2e^{x-a}-x^2$ $\qquad$ $a>1$

$f'(x)=2e^{x-a}-2x$

$f''(x)=2e^{x-a}-2 = 2(e^{x-a}-1)$ $\qquad\qquad$ $x=a$

x	$-\infty$ $\quad x_1 \quad a \quad x_2 \quad +\infty$
$f''(x)$	$- \quad 0 \quad +$
f	$\frown$ $\boxed{\Sigma K}$ $\smile$

το $M(a, 2-a^2)$

Δ2. $f' \downarrow (-\infty, a]$ $\qquad\qquad$ $f(a)=2-a^2$

$f' \uparrow [a,+\infty)$ $\qquad\qquad$ $f'(a)=2-2a<0$

x	$-\infty \quad a \quad +\infty$
$f'(x)$	$- \quad 0 \quad +$
f	$\searrow$ $\boxed{Ελαχ}$ $\nearrow$

$f(a)=2-2a<0$ $\quad (a>1)!$

- $f \downarrow (-\infty, a]$ και συνεχής

$\Rightarrow f\left((-\infty,a]\right)= 2-2a,$

διότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \cdot$

Δ3. Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων της f'

x	$-\infty$	x_1	a	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Στο διάστημα (a, x_2) η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα και "1-1".
Η εξίσωση $f(x)=f(1)$ είναι ισοδύναμη με την $x=1$, άτοπο.

Δ4. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(2,f(2))$ δηλαδή $M(2,-2)$ είναι:

$$y - f(2) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow$$
$$y = -2x+2$$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[2,3]$ θα ισχύει:
$f(x) \geq -2x+2$ για κάθε $x \in [2,3]$.

Έχουμε: $2 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x-2 \leq 1$, άρα

$0 \leq \sqrt{x-2} \leq 1$, για $x \neq 2$

Επομένως $f(x)\sqrt{x-2} > (-2x+2)\sqrt{x-2}$, για κάθε $x \in [2,3]$

Συνεπώς $$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > \int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx = I$$

Θέτουμε $\sqrt{x-2}=u \Leftrightarrow x=u^2+2$

Έχουμε:

x	2	3
u	0	1

και $dx=2u\,du$

Άρα $$I = \int_0^1 (-2(u^2+2)+2)\cdot u\cdot 2u\,du$$

$$\int_0^1 (-2u^2-2)2u^2\,du =$$

$$= -\int_0^1 (4\cancel{u}^4 + 4u^2)\,du = -\frac{32}{15}$$

Συνεπώς $\displaystyle\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{32}{15}$.