ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΓΕΝΙΚΑ ΛΥΚΕΙΑ

11-6-2018

Α1. Σελίδα 99

Α2. **α.** Ψευδής

β. Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & ,x>0\\ x & ,x\le 0\end{cases}$ που είναι 1-1, αλλά όχι γνησίως μονότονη (σελίδα 35 σχολικού βιβλίου).

Α3. Σελίδα 216

Α4.
α. Λάθος
β. Λάθος
γ. Σωστό
δ. Σωστό
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $f'(x)=1+\frac{8}{x^3}$, $x\neq 0$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1+\frac{8}{x^3}=0 \Leftrightarrow \frac{8}{x^3}=-1 \Leftrightarrow x^3=-8 \Leftrightarrow x=-2$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (-∞,-2], γνησίως αύξουσα στα διαστήματα [-2,0) και (0,+∞) εφόσον είναι συνεχής στο -2.

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο -2 το $f(-2)=-2-\frac{4}{(-2)^2}=-2-\frac{4}{4}=-3$

Β2. $f''(x)=-\frac{24}{x^4}$, $x\neq 0$.

Είναι $f''(x)=-\frac{24}{x^4}<0$, $x\neq 0$.

Άρα η f είναι κοίλη σε κάθε ένα από τα διαστήματα (-∞,0) και (0,+∞).

Β3. $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=0-\infty=-\infty$

διότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(4\cdot\frac{1}{x^2}\right)=4\cdot(+\infty)=+\infty$ καθώς $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$ και $x^2>0$ κοντά στο 0.

Η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία x=0 δηλαδή τον άξονα y'y.

Έστω y=λx+β η ασύμπτωτη της C_f.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{4}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right)=1$

  καθώς $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4\cdot\frac{1}{x^3}\right)=4\cdot 0=0$

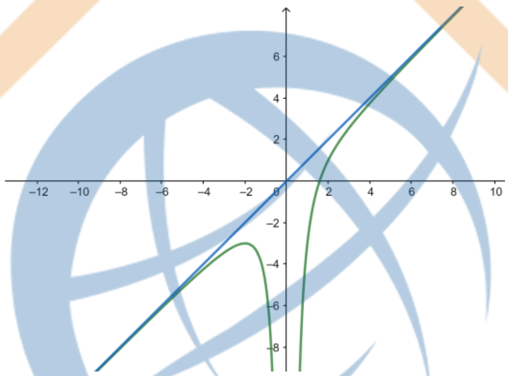
  άρα λ=1

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0$

  άρα β=0

  Η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία y=x στο +∞. Όμοια για το -∞.

Β4.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Τα δύο τμήματα του σύρματος θα έχουν μήκος x m και (8-x) m αντίστοιχα με 0<x<8. Το εμβαδό του τετραγώνου πλευράς $\frac{x}{4}$ είναι $E_T=\left(\frac{x}{4}\right)^2=\frac{x^2}{16}$. Το μήκος του κύκλου είναι L=2πρ δηλαδή 8-x=2πρ άρα η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho=\frac{8-x}{2\pi}$. Το εμβαδό του κύκλου ακτίνας ρ είναι

$$E_K=\pi\cdot\rho^2=\pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2=\pi\frac{64-16x+x^2}{4\pi^2}=\frac{64-16x+x^2}{4\pi}.$$

Τότε η συνάρτηση που δίνει το άθροισμα των εμβαδών τετραγώνου και κύκλου είναι

$$E(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{64-16x+x^2}{4\pi}=\frac{\pi x^2+256-64x+4x^2}{16\pi}$$

άρα $E(x)=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}$, $x\in(0,8)$.

Γ2. Είναι $E'(x)=\frac{2(\pi+4)x-64}{16\pi}=\frac{(\pi+4)x-32}{8\pi}$

$E'(x)=0 \Leftrightarrow (\pi+4)x-32=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{32}{\pi+4}$

x	0		$\frac{32}{\pi+4}$		8
E'		-	0	+	
E		$\searrow$	ελάχιστο	$\nearrow$	

Η E έχει ελάχιστο στο $\dfrac{32}{\pi+4}$.

Τότε η πλευρά του τετραγώνου είναι: $\dfrac{x}{4}=\dfrac{\frac{32}{\pi+4}}{4}=\dfrac{8}{\pi+4}$ και η διάμετρος του κύκλου $\delta=2\rho=2\dfrac{8-\frac{32}{\pi+4}}{2\pi}=\dfrac{\frac{8(\pi+4)}{\pi+4}-\frac{32}{\pi+4}}{\pi}=\dfrac{\frac{8\pi}{\pi+4}}{\pi}=\dfrac{8}{\pi+4}$.

Άρα η διάμετρος του κύκλου κι η πλευρά του τετραγώνου είναι ίσες.

Γ3. Αρκεί να δείξω ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_0 \in (0,8)$ τέτοιος ώστε $E(x_0)=5$.

Η E είναι συνεχής στο $\Delta_1=\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]$ και γνησίως φθίνουσα οπότε

$$E(\Delta_1)=\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim_{x\to 0}E(x)\right)=\left[\frac{16}{\pi+4},\frac{16}{\pi}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}E(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}=\frac{256}{16\pi}=\frac{16}{\pi}>5 .$$

$$E\left(\frac{32}{\pi+4}\right)=\frac{(\pi+4)\left(\frac{32}{\pi+4}\right)^2-64\frac{32}{\pi+4}+256}{16\pi}=\frac{\frac{1024}{\pi+4}-\frac{2048}{\pi+4}+256}{16\pi}=$$

$$=\frac{256-\frac{1024}{\pi+4}}{16\pi}=\frac{256(\pi+4)-1024}{16(\pi+4)\pi}=\frac{256\pi}{16(\pi+4)\pi}=\frac{16}{\pi+4}<5$$

διότι $16<5\pi+20 \Leftrightarrow -4<5\pi$ ισχύει.

Η E είναι συνεχής στο $\Delta_2=\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)$ και γνησίως αύξουσα άρα

$$E(\Delta_2)=\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right),8\right)=\left[\frac{16}{\pi+4},4\right)$$

$$\lim_{x\to 8}E(x)=\lim_{x\to 8}\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}=\frac{(\pi+4)8^2-64\cdot 8+256}{16\pi}=\frac{64\pi}{16\pi}=4$$

Άρα $5\in E(\Delta_1)$ όμως $5\notin E(\Delta_2)$ έτσι η E(x)=5 έχει μοναδική λύση.

Δ.2

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		↘		↗	

η f' παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = a$

το $f'(a) = 2 - 2a < 0$

αφού $a > 1 \Rightarrow 2a > 2 \Rightarrow 2 - 2a < 0$

η f' συνεχής και ↓ στο $A_1 = (-\infty, a]$ άρα

$f'(A_1) = [f'(a), \lim\limits_{x \to -\infty} f'(x)) = [2-2a, +\infty)$ αφού

$\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2e^{x-a} - 2x) = +\infty$ διότι

$\lim\limits_{x \to -\infty} 2e^{x-a} = \lim\limits_{x \to -\infty} 2\frac{e^x}{e^a} = 0$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x) = +\infty$

η f' συνεχής και ↑ στο $A_2 = [a, +\infty)$ άρα

$f'(A_2) = [f'(a), \lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)) = [2-2a, +\infty)$ αφού

$\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2e^{x-a} - 2x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2e^x \left(\frac{1}{e^a} - \frac{x}{e^x}\right) = +\infty$ διότι

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2e^x = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{D.L.H}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

$0 \in f'(A_1)$ και f' ↓ A_1 άρα υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-\infty, a)$

τ.ω $f'(x_1) = 0$

$0 \in f'(A_2)$ και f' ↑ A_2 άρα υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (a, +\infty)$

τ.ω $f'(x_2) = 0$

Για $x < x_1 \Rightarrow f'(x) > f'(x_1) = 0$

$x_1 < x \leq a \Rightarrow f'(x) < f'(x_1) = 0$

Για $a < x < x_2 \Rightarrow f'(x) < f'(x_2) = 0$

$x > x_2 \Rightarrow f'(x) > f'(x_2) = 0$

x	$-\infty$		x_1		a		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	Τ.Μ	↘		↘	Τ.Ε	↗	

άρα η f παρουσιάζει Τ.Μ στο x_1 και Τ.Ε στο x_2

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = 2e^{x-a} - x^2, \quad a>1$$

Δ.1

$$f'(x) = 2e^{x-a} - 2x$$

$$f''(x) = 2e^{x-a} - 2$$

$$f''(x) = 0 \iff 2e^{x-a} = 2$$

$$e^{x-a} = 1 = e^0$$

$$\underline{x = a}$$

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	Σ.Κ	$\smile$

άρα η f έχει σ.κ στο $(a, 2-a^2)$