## ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2018

11 Ιουνίου 2018

**ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΤΩΝ Β.Κ. ΚΑΙ ΤΩΝ Ε.Ε.Κ.**

## ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ» Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Από την Κεντρική Επιτροπή Εξετάσεων δίνονται οι παρακάτω ενδεικτικές απαντήσεις των θεμάτων και υπενθυμίζεται ότι κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

### ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Σελ. 99 σχολικού βιβλίου

**Α2.** **α.** Ψ **β.** π.χ. $g(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ σελ.35

**Α3.** Σελ. 216 σχολικού βιβλίου

**Α4.** **α)** Λ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε) Σ**

### ΘΕΜΑ Β

**Β1.** Η f συνεχής στο πεδίο ορισμού της ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών.
Η f είναι παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγισμού συναρτήσεων με $f'(x)=1+\dfrac{8}{x^3}=\dfrac{x^3+8}{x^3}, x\neq 0$

$$\text{Είναι } f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3+8=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{|-8|}=-2$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{x^3+8}{x^3}>0 \Leftrightarrow x^3(x+2)(x^2-2x+4)>0 \xleftrightarrow{x^2-2x+4>0}$$

$$x(x+2)>0 \Leftrightarrow x<-2 \text{ ή } x>0$$

Άρα f ↗ στο $-\infty,-2 \cup (0,+\infty)$ και f ↘ στο $-2,0$

Στο x=-2 έχουμε τοπικό μέγιστο το f(-2)=-3

| x | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | - | + |
| $f(x)$ | ↗ | | ↘ | ↗ |

**Β2.** Η $f'$ είναι παραγωγίσιμη για $x\neq 0$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωντισμού συναρτήσεων με $f''(x)=-\dfrac{24}{x^4}<0$, για κάθε $x\neq 0$.
Επομένως η f ~~κυρτή~~ στα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$. Εκεί δεν έχει σημεία καμπής.
κοίλη

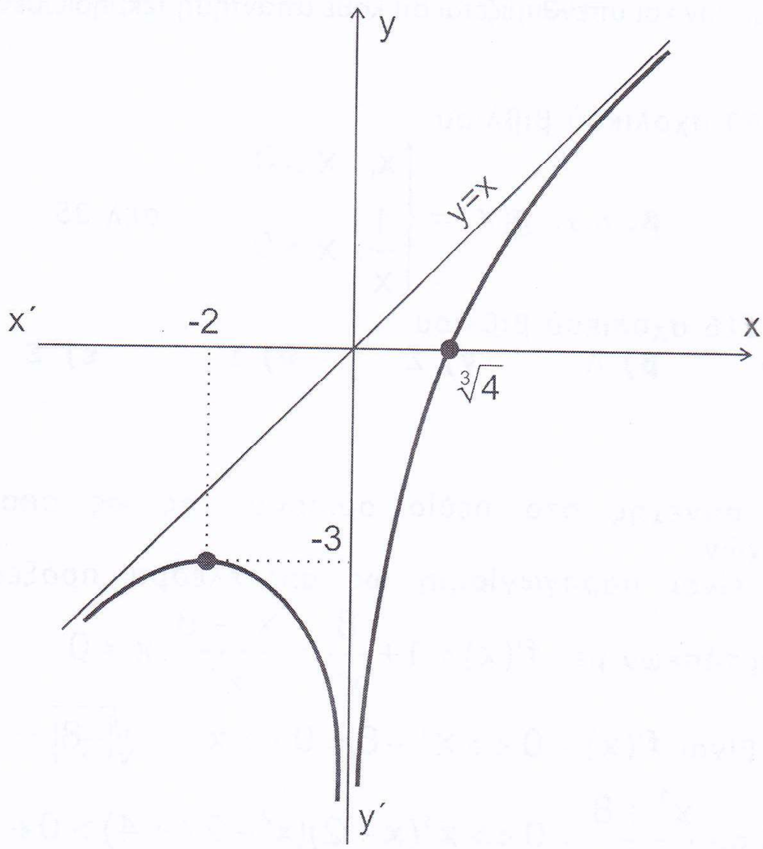
**B3.** Κατακόρυφη : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x - \frac{4}{x^2}) = -\infty$

Επομένως η x=0 κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Στο $+\infty$ έχω $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ldots = 1$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(\frac{-4}{x^2}) = 0$

Άρα η y=x πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$

**B4.** $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4}$




**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Τα δύο τμήματα είναι $x\,m$ και $(8-x)\,m$ με $0 < x < 8$

Με το τμήμα μήκους $x\,m$ φτιάχνουμε τετράγωνο πλευράς $\frac{x}{4}\,m$ με εμβαδόν $\left(\frac{x}{4}\right)^2 m^2$ και με το τμήμα μήκους $(8-x)\,m$ φτιάχνουμε κύκλο, με ακτίνα $\rho = \frac{8-x}{2\pi}\,m$ και με εμβαδόν σε $m^2$ ίσο με $\pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{(8-x)^2}{4\pi}$

Το άθροισμα των εμβαδών σε $m^2$ συναρτήσει του x είναι

$$E(x)=\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{8-x}{4\pi}^2\right)=\frac{x^2}{16}+\frac{64-16x+x^2}{4\pi}=\ldots=\frac{\pi+4\ \ x^2-64x+256}{16\pi}$$

με $x\in(0,8)$

**Γ2.** Το $x_0=\dfrac{32}{\pi+4}$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $\dfrac{x}{4}=\dfrac{8-x}{\pi}$, δηλαδή το μοναδικό σημείο για το ποίο η πλευρά του τετραγώνου ισούται με την διάμετρο του κύκλου.
Η συνάρτηση E(x) είναι παραγωγίσιμη στο (0,8) ως πολυωνυμική με

$$E'(x)=\frac{(\pi+4)x^2-64x+25x)\ '}{16\pi}=\frac{2(\pi+4)x-64}{16\pi}=\frac{(\pi+4)x-32}{8\pi}$$

$$E'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{32}{\pi+4}\in(0,8)$$

$$E'(x)>0\Leftrightarrow x>\frac{32}{\pi+4}$$

| x | 0 | | $32/(\pi+4)$ | | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $E'(x)$ | | - | 0 | + | |
| $E(x)$ | | $\searrow$ | Ολ. Ελάχ. | $\nearrow$ | |

Άρα όταν η πλευρά του τετραγώνου γίνει ίση με τη διάμετρο του κύκλου τότε η συνάρτηση ελαχιστοποιείται.
Αν ένας μαθητής πρώτα αποδείξει ότι η E(x) ελαχιστοποιείται για $x_0=\dfrac{32}{\pi+4}$ και στη συνέχεια ότι για αυτή την τιμή του x η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου, η λύση να θεωρηθεί σωστή.

**Γ3.** $E\nearrow$ στο $\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)$ και $\lim\limits_{x\to8}E(x)=\lim\limits_{x\to8}\left(\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(8-x)^2}{4\pi}\right)=4<5$

Επομένως $5 \notin E\left(\left[\frac{32}{\pi+4},8\right]\right)$ άρα δεν υπάρχει $x \in \left[\frac{32}{\pi+4},8\right)$ τέτοιο ώστε $E(x)=5$

$E \searrow$ στο $\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]$

και $\lim\limits_{x\to 0} E(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{16}+\frac{(8-x)^2}{4\pi}\right) = \frac{16}{\pi} > 5 > 4 > E\left(\frac{32}{\pi+4}\right)$

Επομένως υπάρχει $x \in \left(0,\frac{32}{\pi+4}\right)$ (Θ.Ε.Τ.) τέτοιο ώστε $E(x)=5$ και λόγω μονοτονίας της E είναι μοναδικό.

## ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2 \qquad \alpha > 1$$

**Δ1.** $f'(x) = 2e^{x-\alpha} - 2x$

$f''(x) = 2e^{x-\alpha} - 2$

| x | | α | |
|---|---|---|---|
| f''(x) | - | 0 | + |
| f(x) | $\cap$ | Σ.Κ. | $\cup$ |

**Δ2.** $\lim\limits_{x\to -\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}(2e^{x-\alpha} - 2x) = +\infty$ άρα (f′ συνεχής)

$f'((-\infty,\alpha]) = [2-2\alpha,+\infty)$ και το $0 \in f'((-\infty,\alpha])$.

Οπότε υπάρχει $x_1 < \alpha$ : $f'(x_1)=0$

Ομοίως $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} 2e^{x}(e^{-\alpha} - xe^{-x}) = +\infty$,

γιατί $\lim\limits_{x\to +\infty}(e^{-\alpha} - xe^{-x}) = e^{-\alpha} > 0$ και $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x} = +\infty$

Επομένως (f′ συνεχής) $f'([\alpha,+\infty)) = [2-2\alpha,+\infty)$ και το $0 \in f'([\alpha,+\infty))$.

Οπότε υπάρχει $x_2 > \alpha$ : $f'(x_2)=0$

| x | $-\infty$ | | $x_1$ | | α | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f''(x) | | - | | - | 0 | + | | + | |
| f'(x) | $+\infty$ | + | | - | | - | | + | |
| f(x) | | ↗ | | ↘ | Σ.Κ. | ↘ | | ↗ | |

**Δ3.** $f'(1)=2(e^{1-\alpha}-1)<0$ εφόσον α>1. Άρα $f' \searrow (-\infty,\alpha) \Rightarrow x_1<1$

**Α' Τρόπος**

$x\in(\alpha,x_2)\Rightarrow x>1\Rightarrow f(x)<f(1)$ γιατί $f \searrow$ στο $(x_1,x_2)$ και $x_1<1$

**Β' Τρόπος**

Έστω ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=f(1)$.

Από το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi\in(1,x_0)\subset(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

Άτοπο, γιατί η $f'$ μηδενίζεται μόνο στα $x_1, x_2$.

**Δ4.** Η f είναι κυρτή στο [2,3]. Η εφαπτομένη στο 2 είναι:

$$y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y+2=-2(x-2)\Leftrightarrow y=-2x+2$$

Επομένως $f(x)\geq -2x+2$, για κάθε $x\in 2,3$ με ισότητα μόνο για x=2.
Οπότε

$$\sqrt{x-2}f(x)\geq\sqrt{x-2}(-2x+2),\quad x\in 2,3$$

με ισότητα μόνο για x=2. Άρα

$$\int_2^3\sqrt{x-2}f(x)dx>\int_2^3\sqrt{x-2}(-2x+2)dx$$

Θέτοντας $x-2=t$ έχω $\int_2^3\sqrt{x-2}(-2x+2)dx=\int_0^1\sqrt{t}(-2t-2)dt=$

$$=-2\int_0^1(\sqrt{t})^3dt-2\int_0^1\sqrt{t}dt=\ldots=-\frac{32}{15}$$