

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2003

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8

B. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

Μονάδες 7

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και \bar{z} ο συζυγής του, τότε ισχύει $|z| = |\bar{z}| = |-z|$.

Μονάδες 2

β. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .

Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .

Μονάδες 2

γ. Για κάθε συνάρτηση f , παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ , ισχύει

$$\int f'(x)dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.

Μονάδες 2

ε. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0)=0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0 .

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = a + \beta i$, όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$ και $w = 3z - i\bar{z} + 4$ όπου \bar{z} είναι ο συζυγής του z .

α. Να αποδείξετε ότι

$$\operatorname{Re}(w) = 3a - \beta + 4$$

$$\operatorname{Im}(w) = 3\beta - a.$$

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z , οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$, έχει το ελάχιστο μέτρο.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0,0)$ είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} .

Μονάδες 5

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση $x = 3$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$ που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (a, β) . Αν ισχύει

$f(a) = f(\beta) = 0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma \in (a, \beta)$, $\delta \in (a, \beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$, να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα (a, β) .

Μονάδες 8

β. Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$.

Μονάδες 9

γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

- α. Θεωρία: Θεώρημα σελ. 217 σχολικού βιβλίου
β. Θεωρία: Η απάντηση βρίσκεται στη σελ. 247 του σχολικού βιβλίου

γ.

α-Σ

β-Σ

γ-Σ

δ-Λ

ε-Λ

ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι:

$$w = 3z - \bar{iz} + 4 = 3(\alpha + \beta i) - i(\alpha - \beta i) + 4 = 3\alpha + 3\beta i - \alpha i - \beta + 4 = (3\alpha - \beta + 4) + (3\beta - \alpha)i$$

Έτσι $\operatorname{Re}(w) = 3\alpha - \beta + 4$ και $\operatorname{Im}(w) = 3\beta - \alpha$.

β. Οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο είναι τα σημεία $M(3\alpha - \beta + 4, 3\beta - \alpha)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Αφού ανήκουν σε ευθεία με εξίσωση $y = x - 12$ είναι:

$$3\beta - \alpha = 3\alpha - \beta + 4 - 12 \Leftrightarrow 4\beta - 4\alpha = -8 \Leftrightarrow \beta - \alpha = -2 \Leftrightarrow \beta = \alpha - 2.$$

Από την τελευταία συνάγεται ότι τα σημεία $N(\alpha, \beta)$ που είναι οι εικόνες του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$.

γ. Από τις εικόνες των μιγαδικών αριθμών, των οποίων οι εικόνες κινούνται στην ευθεία $(\varepsilon): y = x - 2$, ελάχιστο μέτρο έχει εκείνος του οποίου η εικόνα K είναι τέτοια ώστε OK κάθετη στην (ε) . Έτσι:

$$\lambda_{OK} = -1 \text{ και } OK: y = -x$$

Λύνοντας το σύστημα:

$$y = x - 2, y = -x$$

προκύπτει $x = 1, y = -1$. Δηλαδή το σημείο K έχει συντεταγμένες $(1, -1)$. Άρα ο μιγαδικός με το ελάχιστο μέτρο από αυτούς που κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$ είναι ο $z = 1 - i$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x$ είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη 2 φορές σε όλο το \mathbb{R} με:

$$f'(x) = (x^5+x^3+x)' = 5x^4+3x^2+1 \text{ και}$$

$$f''(x) = (5x^4+3x^2+1)' = 20x^3+6x$$

- Επειδή είναι $f'(x) = 5x^4+3x^2+1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το \mathbb{R} .
- $f''(x)=0 \Leftrightarrow 20x^3+6x=0 \Leftrightarrow 2x(10x^2+3)=0 \Leftrightarrow x=0$ εφόσον $10x^2+3>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	-	0	+
f	∩		∪

Επομένως η f είναι:

- κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και
- κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$.
- Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο \mathbb{R} θα είναι 1-1 σε αυτό και συνεπώς η f είναι αντιστρέψιμη στο \mathbb{R} .

β. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} (ερώτημα α). Προκειμένου να δείξουμε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$e^x \geq 1+x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Πράγματι, θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x-1-x$ στο \mathbb{R} , η οποία είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με $g'(x)=e^x-1$. Από την εξίσωση $g'(x)=0$ έχουμε $e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$.

Έχουμε:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	-	0	+
g	γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα

$$\text{ελάχ. } g(0) = 0$$

Επομένως $g(x) \geq g(0)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $e^x-1-x \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και άρα:

$$e^x \geq 1+x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

γ. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(0,0)$ έχει εξίσωση

$$y-f(0) = f'(0)(x-0) \text{ ή } y-0 = 1(x-0) \text{ ή } \underline{y=x}$$

που είναι η διχοτόμος της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων. Επειδή τώρα η f είναι αντιστρέψιμη (ερώτημα α) προκύπτει ότι υπάρχει η f^{-1} ή οποία (λόγω πρότασης σελ. 155 σχολ. βιβλ.) έχει $C_{f^{-1}}$ συμμετρική την C_f ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία $y=x$

δ. Για κάθε $x \in [0,3]$ είναι: $x \geq 0$ και επειδή η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό (*), θα είναι $f^{-1}(x) \geq f^{-1}(0) \Leftrightarrow f^{-1}(x) \geq 0$. (αφού $f^{-1}(0) = 0$ **)

Έτσι το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου ισούται με: $E = \int_0^3 f^{-1}(y)dy$.

$$\text{Θέτουμε } f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow y=f(x). \quad (1)$$

Διαφορίζοντας την (1) λαμβάνουμε: $dy=d[f(x)]=f'(x)dx$ και

$$y|_0^3 \rightarrow x|_{f(x)=0}^{f(x)=3} \rightarrow x|_{x^5+x^3+x=0}^{x^5+x^3+x=3} \rightarrow x|_0^1 \quad (***) , \text{ \u03b1\u03c1\u03b1}$$

$$E = \int_0^1 x \cdot f'(x) dx = \int_0^1 x(x^5 + x^3 + x)' dx = \int_0^1 (5x^5 + 3x^3 + x) dx = 5 \int_0^1 x^5 dx + 3 \int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 x dx =$$

$$= 5 \left[\frac{x^6}{6} \right]_0^1 + 3 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 5 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{25}{12} \text{ \u03c4.}\mu.$$

Αιτιολογήσεις για το ερώτημα \u03b4 του 3\u03c9\u03b8 \u03b8\u03b5\u03bc\u03b1\u03c4\u03bf\u03c2:

(*) Η f^{-1} είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο \mathfrak{R} , σύμφωνα με την πρόταση που λέει ότι αν η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε διάστημα Δ τότε υπάρχει η αντίστροφή της η οποία είναι επίσης συνεχής στο $f(\Delta)$ και διατηρεί το ίδιο είδος μονοτονίας με την f . (Η πρόταση αυτή, όμως, δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο και αναφέρεται για λόγους μαθηματικής πληρότητας. Έτσι, η μη αναφορά σε αυτήν από κάποιο μαθητή δεν έχει βαθμολογικές απώλειες).

(**) Ισχύει ότι: $f^{-1}(0)=0$. Πράγματι για $x=0$ έχουμε: $f^{-1}(0)=y \Leftrightarrow f(f^{-1}(0))=f(y) \Leftrightarrow 0=f(y) \Leftrightarrow 0=y^5+y^3+y \Leftrightarrow y(y^4+y^2+1)=0 \Leftrightarrow y=0$.

(***)

- Η εξίσωση $x^5+x^3+x=3$ έχει μοναδική λύση την $x=1$ γιατί η $f(x)$ είναι 1-1 στο \mathfrak{R} και επομένως κάθε οριζόντια ευθεία, οπότε και η $y=3$, τέμνει την C_f σε μοναδικό σημείο.
- Η εξίσωση $x^5+x^3+x=0$ έχει μοναδική λύση την $x=0$, γιατί $x(x^4+x^2+1)=0 \Leftrightarrow x=0$, αφού $x^4+x^2+1 > 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{R}$.

\u0398\u0395\u039c\u0391 4\u03bf

\u03b1. Αφού η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα με άκρα γ , δ και $f(\gamma)f(\delta) < 0$, εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano από το οποίο συνάγεται ότι υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα x_0 που ανήκει στο ανοιχτό διάστημα με άκρα γ , δ ώστε $f(x_0) = 0$.

\u03b2. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\gamma < \delta$ και $f(\gamma) > 0$, $f(\delta) < 0$, οπότε $a < \gamma < x_0 < \delta < \beta$.

i) Στο διάστημα $[a, \gamma]$ είναι:

$$f(a) = 0, f(\gamma) > 0, \text{ \u03b1\u03c1\u03b1 } f(a) < f(\gamma) \text{ και επειδή}$$

είναι $a < \gamma$ συνάγεται ότι:

$$\frac{f(a) - f(\gamma)}{a - \gamma} > 0 \quad (1)$$

\u038c\u03bc\u03c9\u03c2 από το θεώρημα μέσης τιμής (\u0398\u039c\u03a4) για την f στο διάστημα $[a, \gamma]$, υπάρχει $\kappa_1 \in (a, \gamma)$

\u03c9\u03c3\u03c4\u03b5 $f'(\kappa_1) = \frac{f(a) - f(\gamma)}{a - \gamma}$ και λόγω της (1) $f'(\kappa_1) > 0$.

ii) Εργαζόμενοι ομοίως, στο διάστημα $[\gamma, x_0]$ έχουμε:

$f(\gamma) > 0$, $f(x_0) = 0$ \u03b1\u03c1\u03b1 $f(\gamma) > f(x_0)$ και επειδή είναι $\gamma < x_0$ συνάγεται:

$$\frac{f(\gamma) - f(x_0)}{\gamma - x_0} < 0 \quad (2)$$

Από το ΘΜΤ για την f στο διάστημα $[\gamma, x_0]$ έχουμε ότι υπάρχει $\kappa_2 \in (\gamma, x_0)$ ώστε

$$f'(\kappa_2) = \frac{f(\gamma) - f(x_0)}{\gamma - x_0}$$

και λόγω της (2) είναι $f'(\kappa_2) < 0$.

iii) Για το διάστημα $[x_0, \delta]$ όμοια έχουμε ότι υπάρχει $\kappa_3 \in (x_0, \delta)$ ώστε

$$\frac{f(\delta) - f(x_0)}{\delta - x_0} = f'(\kappa_3) < 0$$

iv) Για το διάστημα $[\delta, \beta]$ όμοια έχουμε ότι υπάρχει $\kappa_4 \in (\delta, \beta)$ ώστε

$$\frac{f(\beta) - f(\delta)}{\beta - \delta} = f'(\kappa_4) > 0$$

v) Είναι $f'(\kappa_1) > 0$, $f'(\kappa_2) < 0$ άρα $f'(\kappa_1) > f'(\kappa_2)$ και επειδή $\kappa_1 < \kappa_2$, είναι:

$$\frac{f'(\kappa_1) - f'(\kappa_2)}{\kappa_1 - \kappa_2} < 0$$

Όμως για την f' εφαρμόζεται το ΘΜΤ στο διάστημα $[\kappa_1, \kappa_2]$, οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (\kappa_1, \kappa_2)$ ώστε

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(\kappa_1) - f'(\kappa_2)}{\kappa_1 - \kappa_2} < 0$$

vi) Είναι $f'(\kappa_3) < 0$, $f'(\kappa_4) > 0$, άρα $f'(\kappa_3) < f'(\kappa_4)$ και επειδή $\kappa_3 < \kappa_4$ είναι

$$\frac{f'(\kappa_3) - f'(\kappa_4)}{\kappa_3 - \kappa_4} > 0$$

Όμως για την f' εφαρμόζεται το ΘΜΤ στο διάστημα $[\kappa_3, \kappa_4]$, οπότε υπάρχει $\xi_2 \in (\kappa_3, \kappa_4)$ ώστε

$$f''(\xi_2) = \frac{f'(\kappa_3) - f'(\kappa_4)}{\kappa_3 - \kappa_4} > 0$$

Δείξαμε έτσι ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta)$ ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$.

- γ. Από το β ερώτημα με βάση το θεώρημα Bolzano για την f'' στο κλειστό διάστημα με άκρα ξ_1, ξ_2 προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο ξ_0 που ανήκει στο ανοικτό διάστημα με άκρα ξ_1, ξ_2 ώστε $f''(\xi_0) = 0$.

Το σημείο ξ_0 θα ήταν σημείο καμψής της συνάρτησης εφόσον η f'' άλλαζε πρόσημο εκατέρωθεν αυτού. Όμως κάτι τέτοιο δεν εξασφαλίζεται από τα δεδομένα του θέματος.

β' τρόπος λύσης για το θέμα 4β:

Από το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής για την f που είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ εξασφαλίζεται ότι υπάρχουν δύο σημεία $x_1, x_2 \in [a, \beta]$ με $x_1 < x_2$ ώστε $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

Εφόσον η f παίρνει μία τουλάχιστον αρνητική τιμή και μία τουλάχιστον θετική (πράγμα που συνεπάγεται από την δοσμένη σχέση $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$), η ελάχιστη τιμή $f(x_1)$ θα είναι αρνητική, ενώ η μέγιστη τιμή $f(x_2)$ θα είναι θετική.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, β) άρα και στα εσωτερικά σημεία x_1, x_2 , που επειδή είναι θέσεις ακρότατων από το θ . Fermat συνάγεται ότι $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

Στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f' δεν μπορεί να είναι η σταθερή μηδενική διότι τότε η f θα ήταν σταθερή και άρα $f(x_1) = f(x_2)$ ή $f_{\max} = f_{\min}$ - άτοπο διότι υπάρχουν τα δοσμένα γ, δ για τα οποία ισχύει από υπόθεση $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$.

Συνεπώς υπάρχει σημείο $x_3 \in (x_1, x_2)$ ώστε $f'(x_3) > 0$ ή $f'(x_3) < 0$. Έστω πχ $f'(x_3) > 0$.

Τότε

- από ΘΜΤ για την f' στο $[x_1, x_3]$, υπάρχει $\xi_1 \in (x_1, x_3)$ ώστε:

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(x_3) - f'(x_1)}{x_3 - x_1} = \frac{f'(x_3)}{x_3 - x_1} > 0$$

- από ΘΜΤ για την f' στο $[x_3, x_2]$, υπάρχει $\xi_2 \in (x_3, x_2)$ ώστε:

$$f''(\xi_2) = \frac{f'(x_2) - f'(x_3)}{x_2 - x_3} = \frac{-f'(x_3)}{x_2 - x_3} < 0$$

Αν υποθέταμε $f'(x_3) < 0$ θα προέκυπτε $f''(\xi_1) < 0$, $f''(\xi_2) > 0$.