

After — maths

Μάρκος Βασίλης ΑΘΗΝΑ 2021

Παράγωγος

Γ' Λυκείου: Πρόχειρες σημειώσεις και ασκήσεις

Πρόλογος

Στα χέρια σας ή στις οθόνες σας — πιθανότερα το δεύτερο — βλέπετε το δεύτερο μέρος των σημειώσεων για τα μαθηματικά προσανατολισμού της Γ' Λυκείου. Έχει γίνει, όπως και με το πρώτο μέρος των σημειώσεων, μία εκτεταμένη προσπάθεια να παρουσιαστούν όσες περισσότερες αποδείξεις γίνεται ή, αν αυτό δεν είναι εφικτό, οι διαισθητικές ιδέες πίσω από αυτές. Επίσης, σε σχέση με το σχολικό βιβλίο έχει γίνει μία μικρή αναδιάταξη της ύλης, κυρίως σε σχέση με το θεώρημα του Fermat το οποίο παρουσιάζεται αρκετά νωρίς. Αυτό έγινε, κυρίως γιατί μέσα από το θεώρημα του Fermat αποδεικνύεται φυσιολογικά το θεώρημα του Rolle και, το σημαντικότερο, αποκτά νόημα η ύπαρξή του στην ύλη. Πράγματι, το να διδαχθεί κανείς το θεώρημα του Fermat αφού έχει μάθει ικανές συνθήκες για την εύρεση ακροτάτων μίας συνάρτησης έχει πολύ μικρότερη αξία, καθώς μέσα από το θεώρημα του Fermat προκύπτουν αναγκαίες συνθήκες για την εύρεση ακροτάτων.

Το παρόν αποτελεί μέρος σειράς σημειώσεων, λυμένων παραδειγμάτων και, γενικότερα, διδακτικού υλικού για όλες τις τάξεις του λυκείου που μπορείτε να βρείτε στο **aftermathsgr.wordpress.com**. Για λάθη, διορθώσεις, παραλείψεις και προτάσεις επικοινωνήστε μαζί μου είτε μέσω e-mail στο **vassileiosmarkos@gmail.com** είτε μέσω της φόρμας επικοινωνίας του παραπάνω ιστοτόπου: **<https://aftermathsgr.wordpress.com/contact/>**.

Καλό διάβασμα!

Περιεχόμενα

1 Το πρόβλημα της κατασκευής εφαπτομένης	5
1.1 Η κατασκευή της εφαπτομένης ενός κύκλου σε ένα σημείο του	5
1.2 Μια μη αναλυτική προσέγγιση της εφαπτομένης από τον Descartes	6
1.3 Μια αναλυτική προσέγγιση της εφαπτομένης εμπνευσμένη από τους Fermat και Barrow	11
1.4 Ο ορισμός της παραγώγου	15
1.5 Μια κουβέντα για τα σημεία επαφής	18
1.6 Η εύρεση της εξίσωσης εφαπτομένης μέσω της παραγώγου.	19
1.7 Πότε η εφαπτομένη δεν υπάρχει;	20
1.8 Κατακόρυφη εφαπτομένη	20
1.9 Πλευρικές παράγωγοι	23
2 Η παράγωγος συνάρτηση	27
2.1 Ο ορισμός της παραγώγου συνάρτησης	27
2.2 Παράγωγοι ανώτερης τάξης	28
2.3 Μια φυσική ερμηνεία της παραγώγου, για να μην βαριόμαστε	28
2.4 Οι παράγωγοι των βασικών συναρτήσεων	29
2.4.1 Η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$	29
2.4.2 Η ταυτοτική συνάρτηση $f(x) = x$	30
2.4.3 Το μονώνυμο $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$	30
2.4.4 Η τετραγωνική ρίζα $f(x) = \sqrt{x}$	30
2.4.5 Η υπερβολή $f(x) = \frac{1}{x}$	31
2.4.6 Η συνάρτηση του ημιτόνου $f(x) = \eta\mu x$	31
2.4.7 Η συνάρτηση του ημιτόνου $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$	32
2.4.8 Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$	32
2.5 Κανόνες παραγώγισης	35
2.5.1 Παράγωγος αθροίσματος	36
2.5.2 Παράγωγος βαθμωτού γινομένου	37
2.5.3 Η σχέση ανάμεσα στην παραγωγισιμότητα και τη συνέχεια	39
2.5.4 Παράγωγος γινομένου συναρτήσεων	39
2.5.5 Παράγωγος πηλίκου συναρτήσεων	42
2.5.6 Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης	45
3 Βασικά θεωρήματα που αφορούν τις παραγώγους συναρτήσεων	51
3.1 Το θεώρημα του Fermat	51
3.2 Το θεώρημα του Rolle	59
3.3 Εφαρμογές του θεωρήματος του Rolle	60
3.3.1 Πλήθος λύσεων εξισώσεων	61
3.3.2 1-1 συναρτήσεις	62
3.4 Το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.)	63
3.5 Εφαρμογές του Θεωρήματος Μέσης Τιμής	67

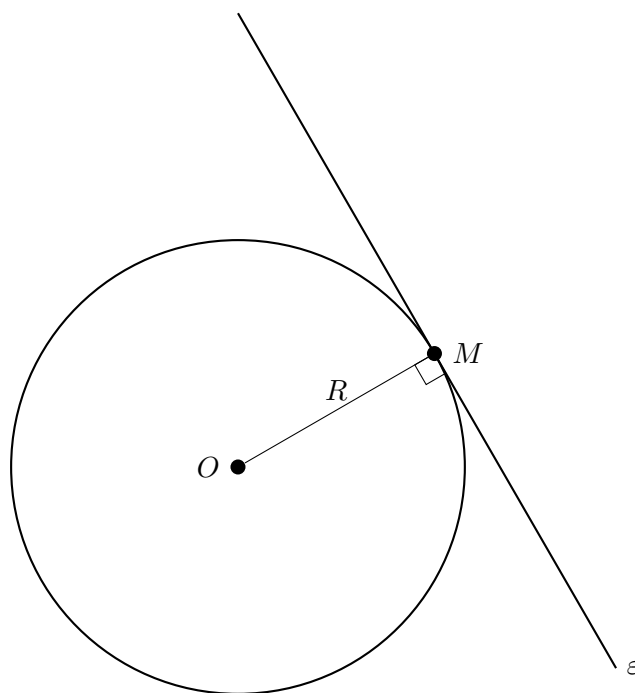
3.5.1	Υπαξη εφαπτομένης με δεδομένη κλίση	67
3.5.2	Απόδειξη ανισοτήτων	68
4	Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής	70
4.1	Σταθερή συνάρτηση	70
4.2	Μονοτονία συνάρτησης	75
4.3	Τοπικά ακρότατα συνάρτησης	78
5	Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις	81
5.1	Ορισμός κυρτών και κοίλων συναρτήσεων	81
5.2	Σημεία καμπής	83
5.3	Σχέση μεταξύ κυρτότητα και εφαπτομένης	85
6	Οι κανόνες de l'Hospital	89
7	Μελέτη και χάραξη γραφικής παράστασης συνάρτησης	93
8	Ασκήσεις	101
8.1	Ερωτήσεις Σωστού ή Λάθους	101
8.2	Α Ομάδας	102
8.3	Β' Ομάδας	105
8.4	Γ' Ομάδα	107

Κεφάλαιο 1

Το πρόβλημα της κατασκευής εφαπτομένης

1.1 Η κατασκευή της εφαπτομένης ενός κύκλου σε ένα σημείο του

Από την αγαπημένη μας γεωμετρία, ξέρουμε πώς να κατασκευάσουμε γεωμετρικά την εφαπτομένη ενός κύκλου (O, R) , κέντρου O και ακτίνας R , στο σημείο M όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.1.



Σχήμα 1.1: Η κατασκευή εφαπτομένης ενός κύκλου

Πρώτα, φέρουμε την ακτίνα OM και στη συνέχεια, δεδομένου ότι η εφαπτομένη σε ένα σημείο M του κύκλου και η ακτίνα που αντιστοιχεί σε εκείνο το σημείο είναι κάθετες, αρκεί να σχεδιάσουμε μία ευθεία, ϵ , κάθετη στο OM που να διέρχεται από το M . Έτσι, απλά, μπορούμε να σχεδιάσουμε την εφαπτομένη ενός κύκλου σε οποιοδήποτε σημείο του.

Στα πλαίσια της περσινής αναλυτικής γεωμετρίας¹ είδαμε ότι ένας κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και ακτίνα ρ έχει εφαπτομένη σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$ την ευθεία ε που έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon) : x_1x + y_1y = \rho^2.$$

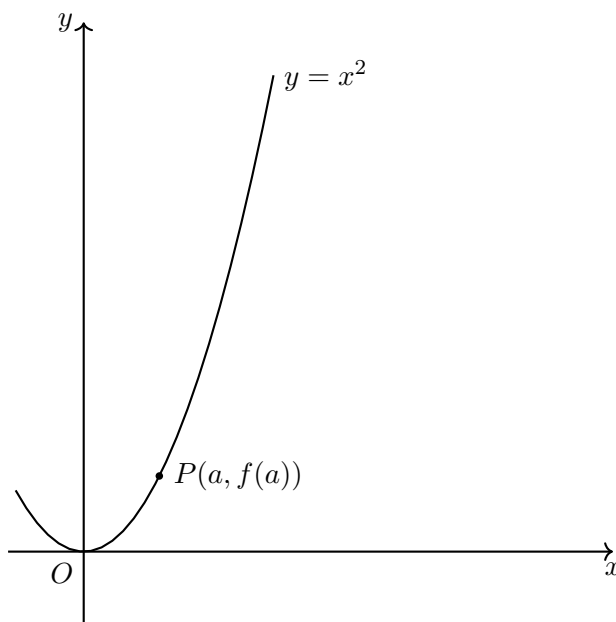
Η απόδειξη του παραπάνω αποτελέσματος βασίστηκε, κατά κύριο λόγο, στην «παραδοσιακή» γεωμετρική κατασκευή της εφαπτομένης και στο γεγονός ότι η εφαπτομένη σε ένα σημείο του κύκλου και η ακτίνα που αντιστοιχεί σε εκείνο το σημείο είναι κάθετες². Αυτή η ιδέα της καθετότητας σε συνδυασμό με λίγη γεωμετρία έδωσε στον Descartes³ μια ιδέα για το πώς να σχεδιάσουμε την εφαπτομένη σε πιο γενικές καμπύλες, πέρα από τον κύκλο.

1.2 Μια μη αναλυτική προσέγγιση της εφαπτομένης από τον Descartes

Στα φετινά μαθηματικά μας απασχολούν, από ό,τι θα έχετε καταλάβει, οι συναρτήσεις, επομένως, όσες καμπύλες δούμε και θα κληθούμε να βρούμε τις εφαπτόμενές τους θα είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι ψάχνουμε να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

στο σημείο $(1, f(1))$. Ο Καρτέσιος, για να βρει την εν λόγω εξίσωση, πρώτα κάνει μια γενικότερη μελέτη/αναζήτηση της εξίσωσης εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο $P(a, f(a))$, όπου $a \in \mathbb{R}$, την οποία θα ακολουθήσουμε κι εμείς. Αρχικά, ας σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της f και το σημείο P , όπως φαίνεται στο σχήμα 1.2.



Σχήμα 1.2: Η γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$.

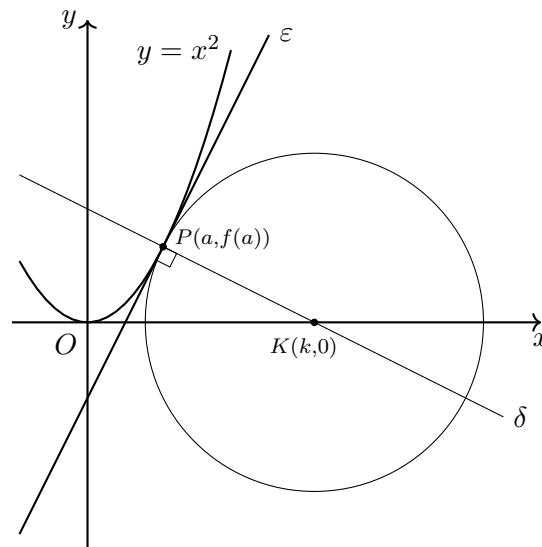
Η ιδέα του Καρτέσιου βασίζεται στην κατασκευή της εφαπτομένης της καμπύλης όπως και στην περίπτωση του κύκλου, χρησιμοποιώντας την ακτίνα του κύκλου σε αυτό το σημείο η οποία έχει την

¹Μαθηματικά Προσανατολισμού, Β' Λυκείου.

²Για περισσότερες λεπτομέρειες, ανατρέξτε στο βιβλίο Μαθηματικών Προσανατολισμού της Β' Λυκείου.

³Τον Καρτέσιο, δηλαδή.

πολύ χρήσιμη ιδιότητα να είναι κάθετη στην εφαπτομένη. Όλα καλά ως εδώ, αλλά πού είναι ο κύκλος, κύριε Καρτέσιε; Εμείς εδώ έχουμε μια παραβολή, όχι κύκλο! Για να καταλάβουμε λίγο καλύτερα την ιδέα του Καρτέσιου, θα εφαρμόσουμε μία μέθοδο των μαθηματικών που λέγεται *Ανάλυση και Σύνθεση*⁴. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε κατασκευάσει τη ζητούμενη εφαπτομένη (ε) της παραβολής στο σημείο $P(a, f(a))$. Τότε, είναι εύκολο να σχεδιάσουμε και μία ευθεία (δ), κάθετη στην (ε), οπότε, αυτή η ευθεία θα τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα σημείο⁵, ας το πούμε $K(k, 0)$. Τότε, αν σχεδιάσουμε έναν κύκλο με κέντρο το σημείο K και ακτίνα (KP), παρατηρούμε ότι η εφαπτομένη της παραβολής είναι και η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο P . Έτσι, δεδομένου ότι μπορούμε να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου σε κάθε σημείο του, το πρόβλημά μας έχει λυθεί. Η κατασκευή που περιγράψαμε φαίνεται και στο σχήμα 1.3.



Σχήμα 1.3: Η ανάλυση της μεθόδου του κύκλου του Descartes.

Από τα παραπάνω είναι σαφές ότι το «μόνο» που πρέπει να κάνουμε είναι βρούμε αυτό το σημείο $K(k, 0)$ που είναι και το κέντρο του πολυπόθητου κύκλου. Ας δούμε τώρα πώς μπορούμε να το κάνουμε αυτό, με βάση τη μέθοδο που πρότεινε ο Descartes. Για ευκολία, θα συμβολίζουμε την ακτίνα (KP) του κύκλου με ρ , οπότε, ο κύκλος που ψάχνουμε θα έχει εξίσωση:

$$(x - k)^2 + y^2 = \rho^2.$$

Εμείς, αυτό που ψάχνουμε είναι το κέντρο του κύκλου (δηλαδή την παράμετρο k) έτσι ώστε ο κύκλος και η παραβολή να έχουν την ίδια εφαπτομένη⁶ στο σημείο $P(a, f(a))$. Επειδή το σημείο $P(a, f(a))$ είναι σημείο και της παραβολής και του κύκλου, πρέπει να ικανοποιεί και την εξίσωση του κύκλου που είδαμε παραπάνω, επομένως, αντικαθιστώντας όπου x και y τις συντεταγμένες του

⁴Η διαδικασία έχει ως εξής: Πρώτα υποθέτουμε ότι έχουμε λύσει το πρόβλημά μας (ανάλυση) και στη συνέχεια, μελετώντας την «λυμένη» κατάσταση, προσπαθούμε να αναχθούμε στα δεδομένα μας και έτσι να ανακαλύψουμε τη λύση «ανάποδα». Έπειτα, ξεκινάμε από την αρχή, έχοντας μόνο τα δεδομένα μας, και, με βάση αυτά, προσπαθούμε να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα, αξιοποιώντας τα προϊόντα της ανάλυσής μας (σύνθεση).

⁵Κάτσε, ντε! Κι αν αυτό το σημείο δεν είναι, όπως στην περίπτωση μας, ένα σημείο που η εφαπτομένη είναι κάθετη στον άξονα $x'x$; Ή αν η εφαπτομένη είναι ο ίδιος ο άξονας $x'x$; Στην πρώτη περίπτωση, έχουμε αυτό που λέμε *κατακόρυφη εφαπτομένη*, που θα μας απασχολήσει για λίγο σε αυτό το κεφάλαιο, εκτός των πλαισίων της ύλης μας. Στην δεύτερη περίπτωση, απλώς μετακινούμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης λίγο πιο πάνω, θεωρώντας τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + c$, για κάποιο $c > 0$ και, μόλις τελειώσουμε με τη δουλειά μας, επιστρέφουμε πίσω, μεταφέροντας ξανά το σχήμα στην αρχική του θέση. Ούτως ή άλλως, το δύσκολο κατά την αναζήτηση της εφαπτομένης μιας καμπύλης είναι η εύρεση της κλίσης της, η οποία δεν αλλάζει κατά τις μεταφορές, μιας και ήδη ξέρουμε ένα σημειώτης εφαπτομένης (το σημείο επαφής).

⁶Γενικότερα, όταν δύο καμπύλες έχουν την ίδια εφαπτομένη σε ένα σημείο, τότε λέμε ότι έχουν *κοινή εφαπτομένη* στο σημείο αυτό ή, απλώς, ότι *εφάπτονται*.

$P(a, f(a))$, παίρνουμε την εξίσωση:

$$(a - k)^2 + (f(a))^2 = \rho^2 \Leftrightarrow (a - k)^2 + a^4 - \rho^2 = 0.$$

Τώρα όμως, τι να κάνουμε; Δεν έχουμε άλλες εξισώσεις/πληροφορίες έτσι ώστε να «φύγουν» κάποιες παράμετροι! Για να χειριστεί αυτήν τη λεπτομέρεια, ο Descartes χρησιμοποιούσε το εξής επιχείρημα.

Ας πάρουμε πρώτα έναν αυθαίρετο κύκλο που να διέρχεται από το σημείο P και να έχει κέντρο K . Τότε, αν δεν είμαστε αρκετά τυχεροί, ο κύκλος αυτός θα τέμνει την παραβολή και σε ένα ακόμα σημείο, ας το ονομάσουμε Q . Όπως γνωρίζουμε, το να τέμνονται δύο καμπύλες σε δύο σημεία σημαίνει, στη γλώσσα των εξισώσεων, ότι η αντίστοιχη εξίσωση έχει ακριβώς δύο λύσεις, τις τετμημένες των δύο σημείων τομής, P και Q (τα x τους). Όταν όμως συμβαίνει αυτό, ο κύκλος και η παραβολή δεν εφάπτονται, άρα δεν έχουμε το ζητούμενο στη δική μας κατάσταση. Αυτό λοιπόν που πρέπει να συμβεί για να εφάπτονται οι δύο καμπύλες, είναι η παραπάνω εξίσωση να έχει ως διπλή λύση την τετμημένη του σημείου P που θέλουμε, δηλαδή, στην δική μας περίπτωση, το 1. Με άλλα λόγια, απαιτούμε, επιπρόσθετα, η εξίσωση:

$$(a - k)^2 + a^4 - \rho^2 = 0,$$

(με μεταβλητή το a και τα k, ρ σταθερά) να έχει ως διπλή λύση, το 1.

Τι σημαίνει, όμως, να έχει μία εξίσωση διπλή λύση; Όταν είναι δευτεροβάθμια, ξέρουμε ότι πρέπει η διακρίνουσα να είναι 0. Όταν όμως δεν είναι δευτεροβάθμια; Όταν, ακόμα χειρότερα, δεν είναι πολυωνυμική; Σε σχέση με το δεύτερο πρόβλημα, αυτό είναι και το κύριο μεονέκτημα της μεθόδου (πέρα από την πολυπλοκότητά της), πράγμα που θα συζητήσουμε παρακάτω. Σε ό,τι αφορά το πρώτο, όμως, ξέρουμε από τη θεωρία των πολυωνύμων⁷ ότι ένα πολύωνμο $p(x)$ έχει ως διπλή λύση έναν αριθμό x_0 , αν και μόνον αν γράφεται στη μορφή:

$$p(x) = (x - x_0)^2 q(x),$$

όπου $q(x)$ είναι ένα άλλο πολύωνμο, δηλαδή:

$$q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Άρα, στην περίπτωσή μας, πρέπει να ισχύει το εξής⁸:

$$(a - k)^2 + a^4 - \rho^2 = (a - 1)^2 q(a).$$

Ας κάνουμε τώρα και λίγες πράξεις στο αριστερό μέλος:

$$(a - k)^2 + a^4 - \rho^2 = a^2 - 2ak + k^2 + a^4 - \rho^2 = a^4 + a^2 - 2k^2 a + k^4 - \rho^2,$$

άρα η εξίσωση ξαναγράφεται στη μορφή:

$$a^4 + a^2 - 2ka + k^2 - \rho^2 = (a - 1)^2 q(a).$$

Ας προχωρήσουμε τώρα και σε άλλη μία παρατήρηση⁹: το πολύωνμο στο αριστερό μέλος της εξίσωσης είναι τετάρτου βαθμού, άρα πρέπει και το πολύωνμο του δεξιού μέλους πρέπει να είναι

⁷Άλγεβρα, Β' Λυκείου.

⁸να θυμόμαστε ότι παίρνουμε σαν μεταβλητή το a , κι εδώ θα φανεί γιατί, ενώ θέλαμε να βρούμε την εφαιπτομένη στο $P(1, 1)$, ξεκινήσαμε να μελετάμε γενικά τι γίνεται σε οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης.

⁹Αν δεν το έχετε καταλάβει ως τώρα, αυτή η μέθοδος είναι ίσως η καλύτερη ευκαιρία να κάνουμε επανάληψη στα πολύωνμα! (Μάλλον, βέβαια, μόνο εγώ χάρηκα...)

τετάρτου βαθμού, επίσης. Εφ' όσον, τώρα, το $(a-1)^2$ είναι δευτέρου βαθμού, πρέπει το $q(a)$ είναι κι αυτό δευτέρου βαθμού¹⁰. Δηλαδή:

$$q(a) = ba^2 + ca + d,$$

για κάποιους αριθμούς $b, c, d \in \mathbb{R}$ με $b \neq 0$. Αντικαθιστώντας κι αυτό στην εξίσωση, έχουμε:

$$a^4 + a^2 - 2ka + k^2 - \rho^2 = (a-1)^2(ba^2 + ca + d),$$

οπότε, κάνοντας λίγες πράξεις στο δεξί μέλος, έχουμε τελικά την ακόλουθη ισότητα πολυωνύμων:

$$a^4 + a^2 - 2ka + k^2 - \rho^2 = ba^4 + (c-2b)a^3 + (d-2c+b)a^2 + (c-2d)a + d.$$

Όπως γνωρίζουμε, δύο πολυώνυμα είναι ίσα αν και μόνον αν οι συντελεστές των ομοβάθμιων όρων τους είναι ίσοι, άρα, στην προκειμένη, πρέπει να επιλύσουμε το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{aligned} b &= 1 \\ c - 2b &= 0 \\ d - 2c + b &= 1 \\ c - 2d &= -2k \\ d &= k^2 - \rho^2. \end{aligned}$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις παίρνουμε άμεσα ότι:

$$b = 1 \text{ και } c = 2,$$

οπότε, από την τρίτη έχουμε:

$$d = 4.$$

Έτσι, βρίσκουμε από τις δύο τελευταίες εξισώσεις, τα πολυπόθητα k και ρ ,

$$k = 3 \text{ και } \rho = \sqrt{5}.$$

Ωραία, άντε και τα βρήκαμε, τι θα τα κάνουμε; Εμείς, την εξίσωση της εφαπτομένης ψάχναμε, δηλαδή, μιας και ξέρουμε ότι διέρχεται από το σημείο P , την κλίση της. Ας δούμε, λίγο το σχήμα 1.4, για να διαφωτιστούμε.

Η εφαπτομένη (ε) είναι κάθετη στην ευθεία (δ), επομένως, για τις κλίσεις τους ισχύει η σχέση:

$$\lambda_\varepsilon \lambda_\delta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -\frac{1}{\lambda_\delta},$$

δεδομένου ότι η ευθεία (δ) δεν είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. Επίσης, δεδομένου ότι οι γωνίες θ και ϕ είναι παραπληρωματικές, έπεται ότι:

$$\lambda_\delta = \varepsilon\theta = -\varepsilon\phi = -\frac{(AP)}{(AK)},$$

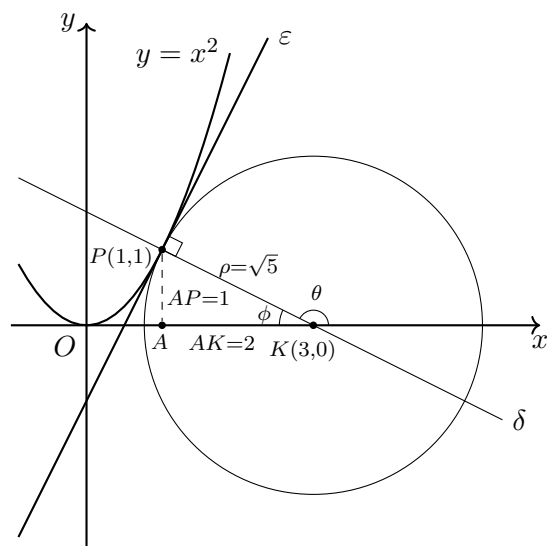
επομένως:

$$\lambda_\varepsilon = -\frac{1}{\lambda_\delta} = \frac{(AK)}{(AP)} = 2.$$

Τέλος, για την εξίσωση της εφαπτομένης, εύκολα βρίσκουμε ότι αυτή είναι:

$$y = 2x - 1.$$

¹⁰Αφού το γινόμενο μη μηδενικών πολυωνύμων έχει βαθμό ίσο με το άθροισμα των βαθμών τους.



Σχήμα 1.4: Η εύρεση της εφαπτομένης της $f(x) = x^2$ στο P .

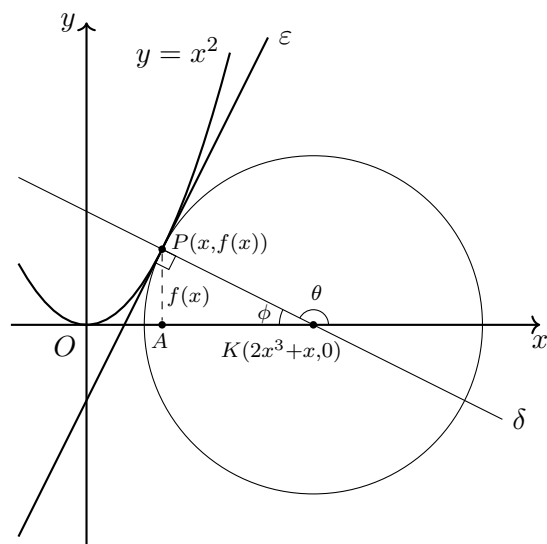
Μάλιστα, ο κύριος Descartes καθώς και άλλοι μαθηματικοί της εποχής του, πήγαιναν την όλη υπόθεση ένα βήμα παραπέρα. Αντί να κάνουν την παραπάνω δουλειά που κάναμε εμείς, έψαχναν την εφαπτομένη σε ένα οποιοδήποτε σημείο $P(x, f(x))$. Για να το κάνουν αυτό, αντί να υποθέσουν ότι το 1 είναι διπλή ρίζα του πολυωνύμου

$$a^4 + a^2 - 2ka + k^2 - \rho^2,$$

υπέθεταν ότι το x είναι διπλή του ρίζα, άρα είχαμε την εξίσωση (ως προς a):

$$a^4 + a^2 - 2ka + k^2 - \rho^2 = (a - x)^2 q(a),$$

η οποία, μετά από την ανάλογη αντιμετώπιση, δίνει τα δεδομένα που φαίνονται στο σχήμα 1.5.



Σχήμα 1.5: Η εύρεση της εφαπτομένης της $f(x) = x^2$ σε κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Από το εν λόγω σχήμα, χρησιμοποιώντας και πάλι τη σχέση:

$$\lambda_\varepsilon = \frac{(AK)}{(AP)},$$

δεδομένου ότι $(AK) = 2x^3 + x - x = 2x^3$, έχουμε:

$$\lambda_\varepsilon = \frac{2x^3}{f(x)} = \frac{2x^3}{x^2} = 2x,$$

Δηλαδή, στο σημείο $P(x, f(x))$, η εφαπτομένη της $f(x) = x^2$ έχει κλίση ίση με:

$$\lambda_\varepsilon = 2x.$$

Όπως θα καταλάβατε, το πρόβλημα εύρεση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης σε ένα σημείο είναι ιδιαίτερα δύσκολο και απαιτεί πολύπλοκους και τεχνικούς υπολογισμούς. Σκεφθείτε, για παράδειγμα, πόσο πιο δύσκολο θα ήταν να βρούμε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 3x^7 + 5x + 3$, που είναι ένα πολυώνυμο εβδόμου βαθμού. Ακόμα χειρότερα, φανταστείτε να χρειαζόταν να βρούμε την εφαπτομένη μιας συνάρτησης που δεν είναι πολυώνυμο (π.χ. $f(x) = \eta\mu x$). Εκεί, το «κόλπο» του Descartes με τη διπλή ρίζα πολυωνύμου δε δουλεύει, απλούστατα διότι δεν έχουμε κάποιο πολυώνυμο. Πρέπει, λοιπόν, να βρούμε μια άλλη προσέγγιση στο πρόβλημα, λίγο πιο γενική.

1.3 Μια αναλυτική προσέγγιση της εφαπτομένης εμπνευσμένη από τους Fermat και Barrow

Είδαμε ότι η προσέγγιση με τον κύκλο του Descartes είναι πολύ κοπιαστική και, μάλιστα, δεν καλύπτει και πολλές από τις περιπτώσεις συναρτήσεων που θα θέλαμε (τριγωνομετρικές, εκθετικές, κ.α.). Κατά τα μέσα του 17^{ου} αιώνα, ο Isaac Barrow παρουσίασε σε μία σειρά διαλέξεών του μία παραλλαγή μιας μεθόδου¹¹ που εφάρμοζε σε κάποια χειρόγραφα του ο Fermat και την οποία δεν είχε δημοσιεύσει ως τότε. Ας δούμε και αυτήν τη μέθοδο η οποία έχει πιο έντονο αναλυτικό χαρακτήρα, παρά αλγεβρικό¹².

Για να διερευνήσουμε αυτήν τη μέθοδο, ας πάρουμε και πάλι την αγαπημένη μας παραβολή¹³, $f(x) = x^2$. Θα ψάξουμε, και σε αυτήν την περίπτωση, την εξίσωση της εφαπτομένης της στο σημείο $P(x, f(x))$ από την αρχή, μιας και αυτό δε θα μας δυσκολέψει καθόλου στους υπολογισμούς μας, σε αντίθεση με τη μέθοδο του κύκλου του Descartes. Η κεντρική ιδέα εδώ είναι η έννοια του «απείρως μικρού» τόξου πάνω στην καμπύλη, το οποίο μπορούμε να κατασκευάσουμε θεωρώντας πάνω στην καμπύλη το σημείο $Q(1+h, f(1+h))$ για κάποιο «απείρως μικρό» h . Αυτό μπορεί να φανεί, αρκετά εστιασμένο για λόγους παρουσίασης, και στο σχήμα 1.6.

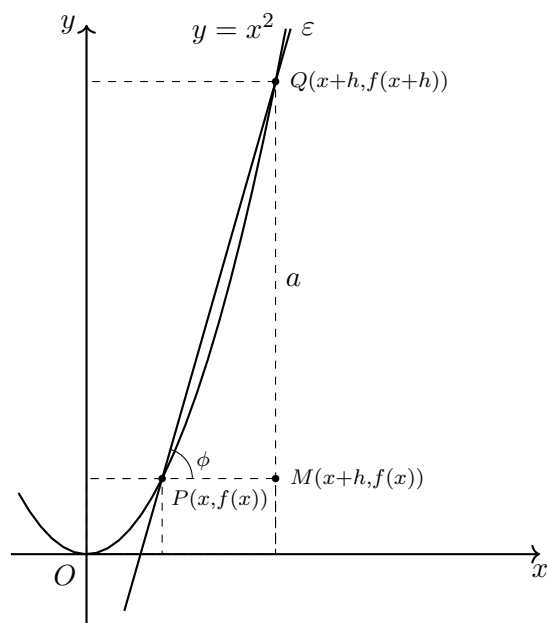
Πριν προχωρήσουμε παρακάτω, ας εξηγήσουμε λίγο τι εννοούμε με το «απείρως μικρό». Προφανώς, στις μέρες μας δεχόμαστε ότι δεν υπάρχει ο «πιο μικρός» θετικός αριθμός ή, με άλλα λόγια, ότι δεν υπάρχει η έννοια του «επόμενου» αριθμού, ανάμεσα σε πραγματικούς αριθμούς. Αυτό είναι κάτι που, αμέσως κάνει την έννοια «απείρως μικρό», να ακούγεται «απείρως λάθος». Μπορούμε, όμως, υποθέτοντας πως κάτι παρόμοιο έκαναν και τότε, να θεωρούμε ότι το h είναι απλώς ένας αριθμός οσοδήποτε κοντά στο 0 θέλουμε κάθε φορά, χωρίς όμως να είναι ακριβώς 0.

Πίσω στη μέθοδο των Barrow και Fermat, τώρα, μπορεί να αμπελοφιλοσοφούμε τόσην ώρα για τα μαθηματικά και τα «απείρως μικρά», αλλά αυτό που σχεδιάσαμε στο σχήμα 1.6 εφαπτομένη

¹¹Μη γελάσετε, αλλά εμείς εδώ θα παρουσιάσουμε μία παραλλαγή της μεθόδου του Barrow, που με τη σειρά της είναι παραλλαγή της μεθόδου του Fermat, μιας και η μέθοδος του Barrow χρησιμοποιεί κάποια μέσα (π.χ. το χαρακτηριστικό τρίγωνο), που σε εμάς είναι και ξένα και άχρηστα. Η κεντρική ιδέα, όμως, της μεθόδου, είναι ακριβώς η ίδια.

¹²Με τον όρο αλγεβρικό χαρακτήρα, εννοούμε ότι η μεθόδός μας ανάγεται σε επίλυση εξισώσεων ή σε χρήση ιδιοτήτων των πολυωνύμων κ.λπ., ενώ με τον όρο αναλυτικό χαρακτήρα, εννοούμε ότι χρησιμοποιούμε τεχνικές που έχουμε δει, κυρίως, στα φετινά μαθηματικά (όρια, συναρτήσεις, κ.α.).

¹³Όχι του ασώτου υιού, πάντως...



Σχήμα 1.6: Ένα απείρως μικρό τόξο πάνω στην παραβολή.

της παραβολής, μια φορά, δεν είναι. Εδώ έρχονται οι δύο κύριοι να κάνουν την εξής, κομβική, παρατήρηση: Τα P, Q είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f , άρα:

$$f(x) = x^2 \text{ και } f(x+h) = (x+h)^2,$$

ή, ισοδύναμα:

$$f(x) - x^2 = 0 \text{ και } f(x+h) - (x+h)^2 = 0,$$

επομένως:

$$f(x) - x^2 = f(x+h) - (x+h)^2 = 0.$$

Για ευκολία, συμβολίζουμε τη διαφορά $f(x+h) - f(x)$ με a , η οποία αναμένουμε να είναι «απείρως μικρή»¹⁴, οπότε, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$a - (x+h)^2 + x^2 = 0.$$

Κάνοντας λίγες πράξεις, παίρνουμε:

$$a - 2xh - h^2 = 0.$$

Από αυτήν την ισότητα, τώρα, όπως ισχυρίζονται οι Barrow και Fermat, μπορούμε να διαγράψουμε τους όρους που περιέχουν μέσα τους h^2 ή, γενικότερα, δυνάμεις του h μεγαλύτερες από το 1, γιατί «δεν έχουν καμμία σημασία»¹⁵. Έτσι, προκύπτει η ανισότητα:

$$a - 2xh = 0.$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι η κλίση της εφαπτομένης θα είναι «απείρως κοντά» στον αριθμό:

$$\varepsilon\phi\phi = \frac{(QM)}{(PM)} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a}{h}.$$

¹⁴ Αν δεν είναι, τότε θα έχουμε πρόβλημα, όπως θα δούμε παρακάτω — αυτή η περίπτωση δεν εξετάζεται από τους Barrow και Fermat, απλώς εμείς την επισημαίνουμε.

¹⁵ Αυτό, δεν είναι τόσο μεγάλη ασάφεια όσο φαίνεται, δεδομένου ότι το h είναι ένας αριθμός πολύ κοντά στο 0, επομένως, τα h^2, h^3, \dots θα είναι αριθμοί ακόμα πιο κοντά στο 0, δεδομένου ότι, για $|h| < 1$, με $h \neq 0$, ισχύει, ως γνωστόν, η σχέση:

$$h > h^2 > h^3 > \dots$$

Από την προηγούμενη σχέση, παίρνουμε:

$$a = 2xh,$$

επομένως:

$$\varepsilon\phi = \frac{a}{h} = \frac{2xh}{h} = 2x,$$

που είναι και το αποτέλεσμα που είχαμε βρει, στη γενική περίπτωση, με τον κανόνα του Descartes.

Ας δούμε και ένα πιο «δύσκολο» πολυώνυμο, το $f(x) = x^3$. Σε αυτήν την περίπτωση, θέτουμε:

$$a = f(x+h) - f(x),$$

πάντα για ένα «απείρως μικρό» h , και, αφού τα σημεία $(x, f(x))$ και $(x+h, f(x+h))$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης, έχουμε:

$$f(x+h) = (x+h)^3 \text{ και } f(x) = x^3,$$

δηλαδή, με άλλα λόγια,

$$f(x+h) - (x+h)^3 = 0 \text{ και } f(x) - x^3 = 0,$$

οπότε, εξισώνοντας τις δύο σχέσεις:

$$f(x+h) - (x+h)^3 = f(x) - x^3.$$

Αναπτύσσουμε τώρα τις ταυτότες, οπότε¹⁶:

$$a - x^3 - 3x^2h - 3xh^2 - h^3 = -x^3.$$

Απλοποιούμε και διαγράφουμε όλους τους όρους που περιέχουν κάποια δύναμη του h μεγαλύτερη από 1, οπότε έχουμε:

$$a - 3x^2h = 0.$$

Όμοια με πριν, η εφαπτομένη της γωνίας ϕ θα δίνεται από τη σχέση:

$$\varepsilon\phi = \frac{a}{h},$$

οπότε, αφού $a = 3x^2h$, έπεται:

$$\varepsilon\phi = \frac{3x^2h}{h} = 3x^2.$$

Οπότε, για παράδειγμα, στο σημείο $P(1, 1)$, η γραφική παράσταση της $f(x) = x^3$ είναι η ευθεία με κλίση:

$$\lambda = 3 \cdot 1^2 = 3,$$

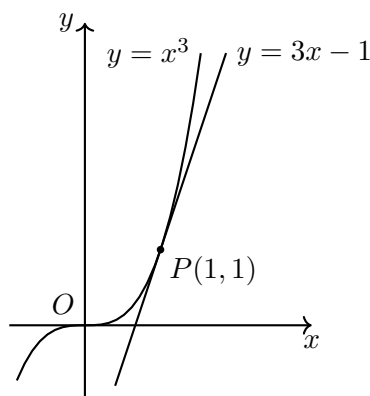
που διέρχεται από το $P(1, 1)$, δηλαδή η ευθεία με εξίσωση:

$$y = 3x - 2,$$

όπως μπορεί να επαληθεύσει κανείς και από το σχήμα 1.7.

Αλλά, τα πολυώνυμα, εύκολα ή δύσκολα, τα χειριζόμαστε και με τη μέθοδο του κύκλου το Descartes, αλλά το θέμα είναι τι κάνουμε με άλλες, πιο «δύσκολες», συναρτήσεις. Ας πάρουμε, για παράδειγμα,

¹⁶Προφανώς, δεν αντικαθιστούμε $f(x)$ και $f(x+h)$ με x^3 και $(x+h)^3$ αντίστοιχα, διότι τότε θα καταλήγαμε σε μια εξίσωση της μορφής $0 = 0$ — γι' αυτό θέσαμε a τη διαφορά $f(x+h) - f(x)$, για να μη μας μπερδεύει.



Σχήμα 1.7: Η εφαπτομένη της $f(x) = x^3$ στο $P(1, 1)$.

τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$. Τότε, όπως προηγουμένως, παίρνουμε ένα «απείρως μικρό» h και θέτουμε:

$$a = \eta\mu(x + h) - \eta\mu x.$$

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, αφού:

$$f(x + h) = \eta\mu(x + h) \text{ και } f(x) = \eta\mu x,$$

παίρνουμε τη σχέση:

$$f(x + h) - \eta\mu(x + h) = f(x) - \eta\mu x,$$

δηλαδή, για να εμφανίσουμε και το a , παίρνουμε τη σχέση:

$$a = -\eta\mu(x + h) + \eta\mu x.$$

Εδώ θέλει λίγη παραπάνω δουλειά. Ας θυμηθούμε, από την τριγωνομετρία μας, την εξής ταυτότητα:

$$\eta\mu(x + y) = \eta\mu x \sigma\upsilon\nu y + \eta\mu y \sigma\upsilon\nu x.$$

Από αυτήν, έχουμε το εξής αποτέλεσμα:

$$a = -\eta\mu x \sigma\upsilon\nu h + \eta\mu h \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = \eta\mu x(1 - \sigma\upsilon\nu h) - \eta\mu h \sigma\upsilon\nu x.$$

Ας σκεφτούμε, τώρα, τι έχουμε. Το h είναι «απείρως μικρό», δηλαδή, πολύ κοντά στο 0, επομένως, και το $\eta\mu h$ θα είναι πολύ κοντά στο 0, αφού ισχύει η ανισότητα:

$$-h < \eta\mu h < h,$$

για $h \neq 0$. Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι «δεν έχει καμιά σημασία» και να το αγνοήσουμε, οπότε η εξίσωσή μας γίνεται:

$$a = \eta\mu x(1 - \sigma\upsilon\nu h).$$

Από την άλλη, και το $\sigma\upsilon\nu h$, για «απείρως μικρά» h είναι πολύ κοντά στο 1, επομένως, μπορούμε να πούμε ότι το $1 - \sigma\upsilon\nu h$ είναι πολύ κοντά στο 0 και, άρα, να το παραλείψουμε κι αυτό, οπότε:

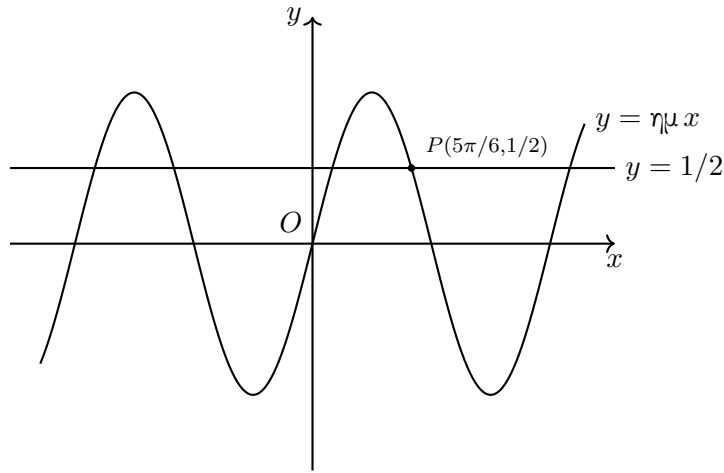
$$a = 0,$$

το οποίο δε μοιάζει λογικό, αφού τότε η κλίση της εφαπτομένης θα έπρεπε να είναι παντού ίση με:

$$\epsilon\phi\phi = \frac{a}{h} = \frac{0}{h} = 0,$$

πράγμα που δεν είναι σίγουρα σωστό, αν κανείς δει το σχήμα 1.8.

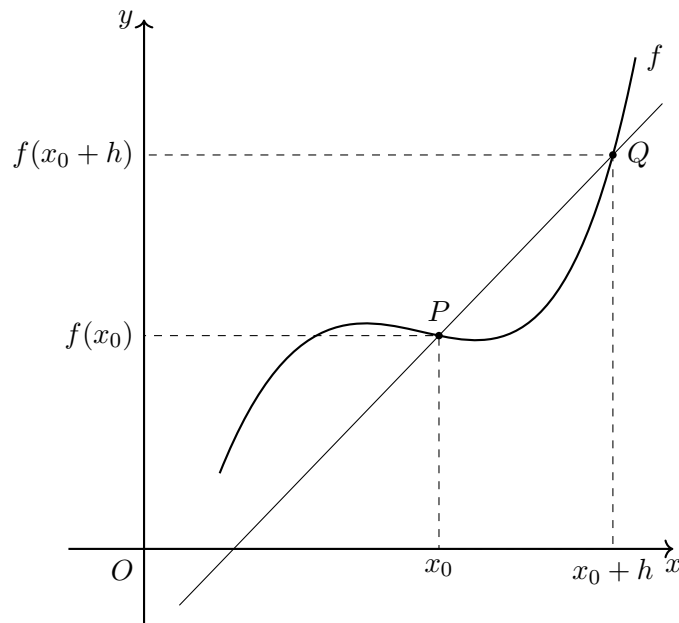
Τι πήγε λάθος εδώ; Εδώ, αυτό που πήγε λάθος είναι το ότι διαγράψαμε ό,τι βρήκαμε μπροστά μας, μιας και η μέθοδος, πέρα από την προτροπή να διαγράφουμε όλες τις δυνάμεις του h που είναι μεγαλύτερες από 1, δεν μας δίνει κάποιο άλλο εργαλείο σε περιπτώσεις που είναι πιο «περίπλοκες». Εδώ, λοιπόν, πρέπει να εφαρμόσουμε τις γνώσεις μας από τα προηγούμενα κεφάλαια.



Σχήμα 1.8: Μια εφαπτομένη της $f(x) = \eta\mu x$ που δε γίνεται να έχει κλίση 0.

1.4 Ο ορισμός της παραγώγου

Όπως είδαμε, και οι δύο μέθοδοι που παρουσιάστηκαν παραπάνω έχουν προβλήματα, είτε με το πόσο εύχρηστες είναι είτε με το πόσο *μαθηματικά αυστηρές* είναι. Ας ρίξουμε όμως μια ματιά στη δεύτερη μέθοδο, αυτή των Barrow και Fermat, σε σχέση με την ιδέα που κρύβει από πίσω της. Ας πάρουμε μία συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ που έχει τη γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα 1.9 και έστω $x_0 \in (a, b)$ ένα σημείο στο εσωτερικό¹⁷ του πεδίου ορισμού της.



Σχήμα 1.9: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Αυτό που κρύβεται πίσω από την ιδέα των Barrow και Fermat είναι μία ιδέα που θα μας φανεί πολύ χρήσιμη άμεσα. Αντί να σχεδιάσουν την εφαπτομένη ή να την αναζητήσουν απευθείας, κατασκευά-

¹⁷Λέγοντας εσωτερικό, εννοούμε ότι μπορούμε να πάμε και «λίγο» αριστερά και «λίγο» δεξιά από το x_0 χωρίς να βρεθούμε έξω από το πεδίο ορισμού της f . Με άλλα λόγια, υπάρχει ένας αριθμός $\delta > 0$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D_f.$$

ζουν πρώτα μία τέμνουσα, «απείρως κοντά» στη θέση που «θα βρισκόταν» η εφαπτομένη¹⁸ και, στη συνέχεια, κάνουν τους υπολογισμούς τους με αυτές τις «ελευθερίες» που είδαμε παραπάνω (αφαιρούν όρους από εξισώσεις κ.λπ.). Δανειζόμενοι αυτήν την ιδέα, αρχικά διαλέγουμε έναν αριθμό h έτσι ώστε ο $x + h$ να είναι μέσα στο πεδίο ορισμού¹⁹ της f και σχεδιάζουμε την τέμνουσα PQ , όπου $P(x_0, f(x_0))$ και $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.9.

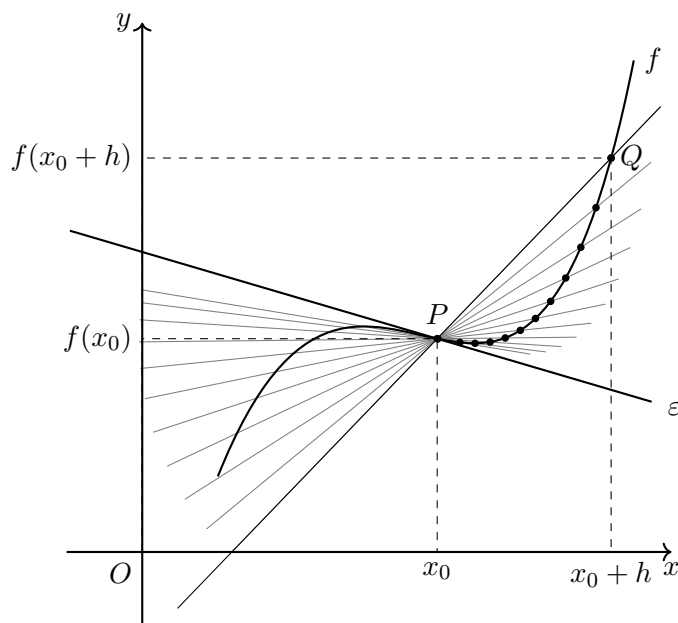
Και εδώ έρχεται η διαφοροποίηση σε σχέση με την ιδέα των Barrow και Fermat. Αντί να πάρουμε το h από την αρχή «απείρως μικρό», μετά να κάνουμε απλοποιήσεις και στο τέλος να υπολογίσουμε την κλίση της εφαπτομένης από τον λόγο:

$$\frac{a}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

ξεκινάμε από τον τελευταίο λόγο, ο οποίος υπολογίζει, στην πραγματικότητα, την κλίση της τέμνουσας PQ και, σκεφτόμαστε ως εξής: αν, αφήνοντας το h να γίνει πολύ μικρό, δηλαδή, καθώς το $h \rightarrow 0$, ο λόγος

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

προσεγγίζει κάποιον αριθμό, τότε, αυτός ο αριθμός θα πρέπει να είναι και η κλίση της εφαπτομένης της f στο P , αφού, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.10, καθώς το $h \rightarrow 0$, το σημείο Q πλησιάζει το σημείο P και, ως εκ τούτου, αν υπάρχει η εφαπτομένη²⁰, οι τέμνουσες PQ θα προσεγγίζουν την εφαπτομένη (ε) της f στο P .



Σχήμα 1.10: Στον δρόμο για την εφαπτομένη.

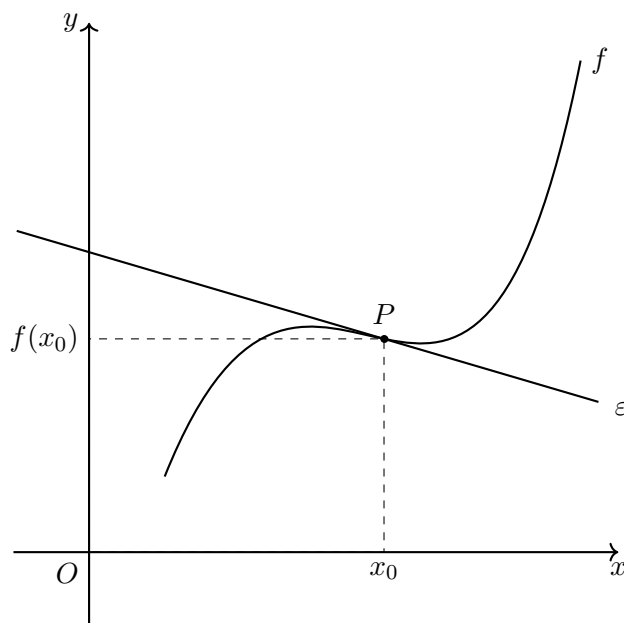
Για να φανεί ότι η (ε) πράγματι εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο P , μπορούμε να δούμε και το σχήμα 1.11.

Για να συνοψίσουμε λίγο την παραπάνω συζήτηση, αυτό που θέλουμε να ισχύει έτσι ώστε να μπορούμε να πούμε ότι η εφαπτομένη σε ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f υπάρχει είναι

¹⁸Το κύριο πρόβλημα εδώ είναι ότι κανείς δεν μας (τους) είπε ότι η εφαπτομένη σε εκείνο το σημείο υπάρχει.

¹⁹Εδώ φαίνεται γιατί πήραμε το x_0 στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της f : αν δεν το είχαμε κάνει αυτό, δεν θα μπορούσαμε να βρούμε αυτό το h σε κάθε περίπτωση.

²⁰Προφανώς, στο σχήμα 1.10 φροντίσαμε να υπάρχει. Το πότε υπάρχει/δεν υπάρχει η εφαπτομένη θα μας απασχολήσει άμεσα.



Σχήμα 1.11: Η εφαπτομένη (ε) της f στο P .

να η παράσταση:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

να προσεγγίζει έναν αριθμό καθώς το $h \rightarrow 0$, δηλαδή, στη γλώσσα που έχουμε αναπτύξει φέτος:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Επίσης, αυτός ο αριθμός θα είναι ακριβώς η κλίση της εφαπτομένης της f στο x_0 .

Στην πράξη, συνηθίζεται να χρησιμοποιούμε έναν άλλο τύπο, ο οποίο προκύπτει από αυτόν αν κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής:

$$x = x_0 + h \Rightarrow x \rightarrow x_0,$$

οπότε, το παραπάνω όριο παίρνει τη μορφή:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Επίσης, συνηθίζουμε, όταν υπάρχει, αυτό το όριο να το συμβολίζουμε με $f'(x_0)$. Όλα τα παραπάνω μπορούμε να τα δούμε, συμμαζεμένα, στον ακόλουθο ορισμό, για τον οποίο είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι μιλάμε πάντα για ένα σημείο στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της f .

Ορισμός 1 (Παράγωγος συνάρτησης στο x_0)

Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση και $x_0 \in A$ ένα σημείο του εσωτερικού του A . Τότε, θα λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Θα συμβολίζουμε με²¹ $f'(x_0)$ το παραπάνω όριο, και θα το λέμε *παράγωγο της f στο x_0* .

²¹ Αρκετές φορές, μπορεί να συναντήσετε και τον συμβολισμό του Leibniz, όπως λέγεται:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$$

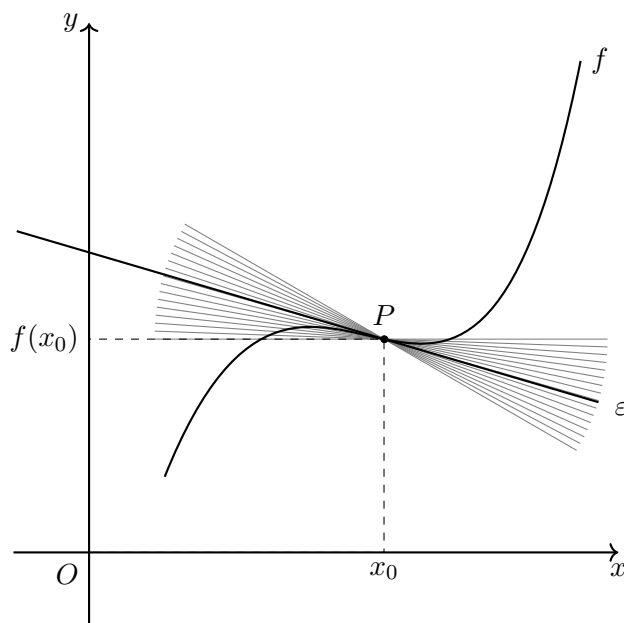
αν και δεν τον προτιμάμε συχνά.

1.5 Μια κουβέντα για τα σημεία επαφής

Μέσα στην όλη φασαρία με τις μεθόδους, τα όρια και τα λοιπά, δεν εστιάσαμε σε κάτι, αν μη τι άλλο, ασυνήθιστο, σε ό,τι αφορά την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που φαίνεται στο σχήμα 1.11 και στην εφαπτομένη του κύκλου που φαίνεται στο σχήμα 1.1 ή ακόμα και στην εφαπτομένη της παραβολής που φαίνεται στο σχήμα 1.3. Στον κύκλο και την παραβολή, η εφαπτομένη «ακουμπά» τον την καμπύλη σε ένα σημείο και αφήνει όλη την καμπύλη από τη μία μεριά της²² ενώ, στην περίπτωση του σχήματος 1.11, η καμπύλη περνά από τη μία μεριά της εφαπτομένης στην άλλη. Τι είναι λοιπόν αυτό που την καθιστά πράγματι εφαπτομένη;

Εδώ η ιδέα είναι, ίσως, λίγο διαφορετική από αυτήν την κλασσικής Ευκλείδειας γεωμετρίας. για την εφαπτομένη. Στη γεωμετρία, η εφαπτομένη μιας καμπύλης (του κύκλου, αρχικά) ορίζεται σαν η ευθεία που τον ακουμπά σε ένα μόνο σημείο. Η ιδιότητα όμως που κρύβεται πίσω από αυτό, αλλά, ακριβώς επειδή ένας κύκλος ή ακόμα και μια παραβολή ή μία κωνική τομή, που, εν γένει, είναι απλές καμπύλες στη δομή τους και δεν μπορούν να την αναδείξουν, είναι η ιδιότητα ότι η εφαπτομένη στο σημείο P της καμπύλης είναι εκείνη η ευθεία που, σε σχέση με όλες τις άλλες ευθείες που διέρχονται από το σημείο P , προσεγγίζει καλύτερα την καμπύλη.

Πράγματι, αν ρίξουμε μια ματιά στο σχήμα 1.12 βλέπουμε ότι οποιαδήποτε άλλη ευθεία περνάει από το P μπορεί να προσεγγίζει τη γραφική παράσταση της f καλύτερα από τη μία μεριά, αλλά χάνει από την άλλη²³.



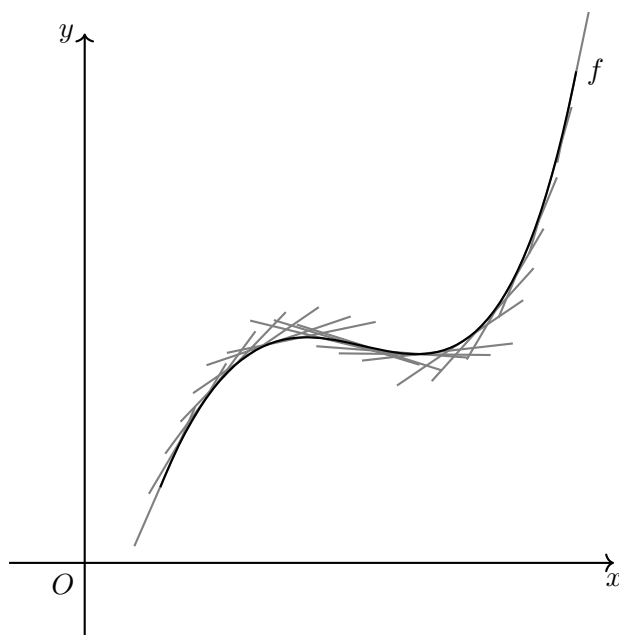
Σχήμα 1.12: Παίζοντας με της «εφαπτόμενες».

Έτσι, σε αντίθεση με την παραδοσιακή μας γεωμετρία, δε θα μιλάμε για εφαπτομένη έχοντας κατά νου μία ευθεία που να τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης μόνο σε ένα σημείο, αλλά για μια ευθεία που μπορεί να προσεγγίσει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης καλύτερα από κάθε άλλη. Με άλλα λόγια, η εφαπτομένη είναι η ευθεία που, κοντά στο x_0 , κάνει την καλύτερη εκτίμηση της συνάρτησης. Ένας τρόπος για να το καταλάβουμε αυτό είναι να δούμε το σχήμα 1.13. Αυτό που κάναμε ήταν να πάμε και να σχεδιάσουμε την εφαπτομένη της συνάρτησης σε πολλά σημεία του πεδίου ορισμού της οπότε βλέπουμε ότι οι εν λόγω ευθείες μας δίνουν μία πολύ καλή προσέγγιση

²²Πιο αυστηρά, θα λέγαμε ότι η καμπύλη περιέχεται στο ένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η εφαπτομένη.

²³Γενικά, ξεφεύγει από τα όρια της ύλης μας το να αποδείξουμε και μαθηματικά το παραπάνω, οπότε, ας αρχέστούμε σε αυτή τη διαισθητική ερμηνεία.

της f .



Σχήμα 1.13: Μία προσέγγιση της f μέσα από τις εφαπτόμενές της.

Κρατάμε, λοιπόν, κατά νου σε όλα τα επόμενα ότι μπορεί να συναντήσουμε εφαπτόμενες που να τέμνουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και σε περισσότερα από ένα σημεία ή που να «διασχίζουν» τη γραφική της παράστασης ή και να θυμίζουν, κάπως, τις εφαπτόμενες των κωνικών τομών.

1.6 Η εύρεση της εξίσωσης εφαπτομένης μέσω της παραγώγου.

Τώρα που, επιτέλους, βρήκαμε τα κατάλληλα λόγια να εκφράσουμε την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης, ας βρούμε και την εξίσωση εφαπτομένης μιας συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο $P(x_0, f(x_0))$. Γενικά, η ευθεία αυτή θα έχει την μορφή:

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0),$$

επομένως, αφού το σημείο $P(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο της εφαπτομένης και αυτή, όπως δείξαμε, θα έχει κλίση $\lambda = f'(x_0)$, η εξίσωση θα πάρει την μορφή:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Για παράδειγμα, αν $f(x) = x^2$ και $P(1, f(1))$, τότε, εύκολα βρίσκουμε ότι $f(1) = 1$, ενώ για την παράγωγο της f στο 1 έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2, \end{aligned}$$

άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η:

$$y - 1 = 2(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 1.$$

1.7 Πότε η εφαπτομένη δεν υπάρχει;

Στην παραπάνω συζήτηση, ορίσαμε την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f να είναι ίση με την παράγωγό της σε εκείνο το σημείο. Τι γίνεται, όμως, όταν το όριο που ορίζει την παράγωγο, δηλαδή το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

δεν υπάρχει;

Προφανώς, τότε, δεν μπορούμε να μιλάμε για εφαπτομένη της f εκείνο το σημείο, όπως, για παράδειγμα, και στο σχήμα 1.14 όπου δεν μπορούμε να σχεδιάσουμε μία ευθεία που να προσεγγίζει καλά τη γραφική παράσταση της $f(x) = |x|$ στο σημείο $O(0, 0)$. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x},$$

δεν υπάρχει, δεδομένου ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1,$$

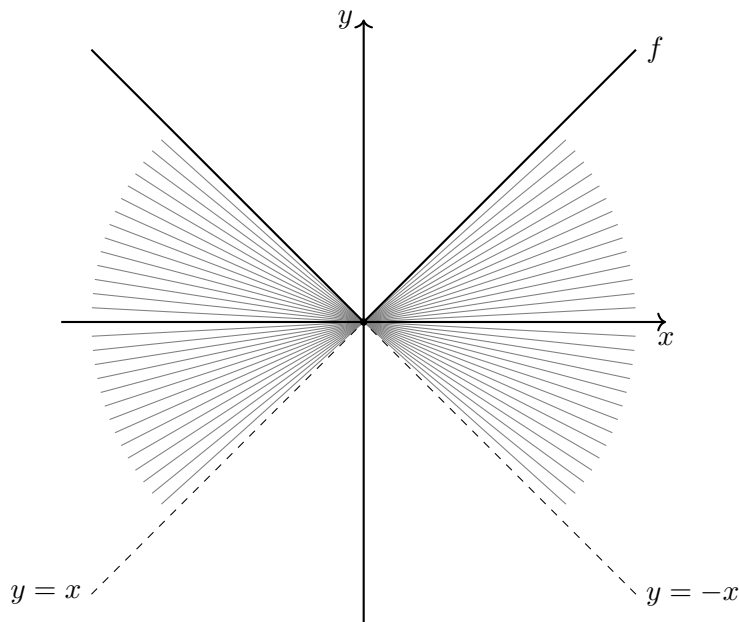
ενώ:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

άρα το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

δεν υπάρχει.



Σχήμα 1.14: Οι «εφαπτόμενες» της f στο $O(0, 0)$.

1.8 Κατακόρυφη εφαπτομένη

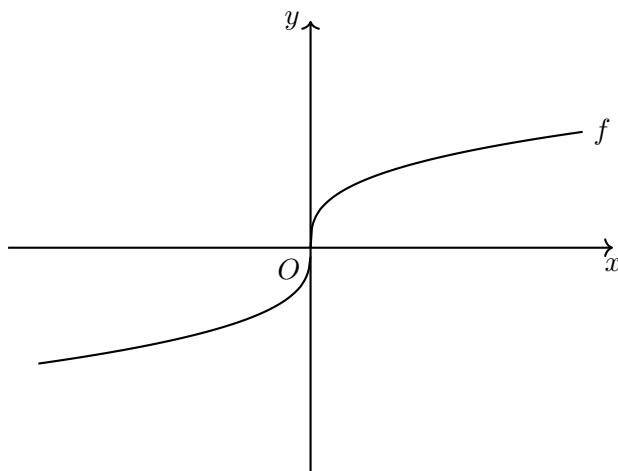
Είδαμε τι γίνεται όταν το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, οπότε η γραφική παράσταση της f έχει εφαπτομένη στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ και όταν το όριο δεν υπάρχει, οπότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει εφαπτομένη στο $(x_0, f(x_0))$. Τι συμβαίνει, όμως, όταν το παραπάνω όριο υπάρχει, μεν, είναι άπειρο, δε; Ας πάρουμε, για παράδειγμα, τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x} & x < 0 \end{cases}$$

η οποία έχει τη γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα 1.15.



Σχήμα 1.15: Η γραφική παράσταση της f .

Ας πάρουμε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Υπολογίζουμε τα δύο πλευρικά όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty,$$

και,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sqrt[3]{-x}}{x} \stackrel{y=-x}{\underset{y \rightarrow 0^+}{=}} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-\sqrt[3]{y}}{-y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{y}}{y} = +\infty,$$

επομένως το όριο υπάρχει και μάλιστα:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty.$$

Να σκεφτούμε τώρα τι σημαίνει, εποπτικά, αυτό. Είπαμε ότι, όταν υπάρχει, το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0},$$

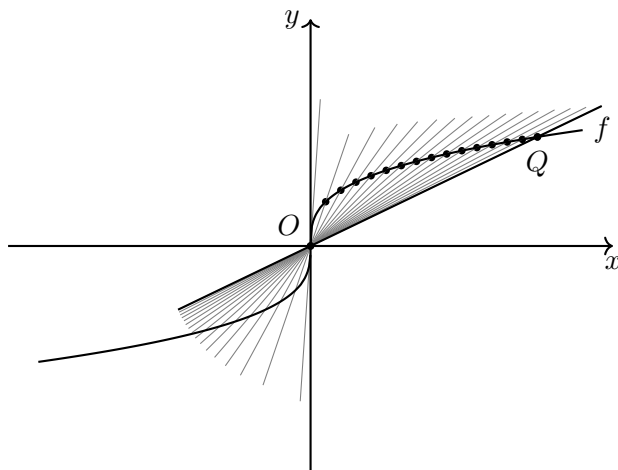
αυτό είναι ίσο με την κλίση λ της εφαπτομένης της f στο $O(0, f(0))$, η οποία, με τη σειρά της, είναι ίση με την εφαπτομένη της γωνίας θ που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον ημιάξονα Ox . Δηλαδή, στην περίπτωσή μας:

$$\varepsilon\varphi \theta = \lambda = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty.$$

Ωραία, ποια γωνία έχει εφαπτομένη ίση με το $+\infty$. Η αλήθεια είναι πως δεν υπάρχει τέτοια γωνία, αλλά, αν θυμηθούμε λίγο τη γραφική παράσταση της εφαπτομένης, τότε θα δούμε ότι:

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi \theta = +\infty,$$

δηλαδή, καθώς πλησιάζουμε στο $\frac{\pi}{2}$ από αριστερά, η εφαπτομένη της γωνίας θ πλησιάζει το $+\infty$. Με άλλα λόγια, στην περίπτωση μας, οι τέμνουσες της γραφικής παράστασης της f που διέρχονται από το $O(0,0)$, καθώς το σημείο Q προσεγγίζει το σημείο O (βλ. σχήμα 1.16), έχουν κλίση που προσεγγίζει το άπειρο, δηλαδή «τείνουν» να σχηματίσουν ορθή γωνία με τον άξονα $x'x$, επομένως, μπορούμε να πούμε ότι σε εκείνο το σημείο, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f θα είναι η κατακόρυφη ευθεία $x = 0$, δηλαδή, ο άξονας $y'y$, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.16.



Σχήμα 1.16: Η κατακόρυφη εφαπτομένη της f .

Ας πάρουμε και το παράδειγμα μιας ακόμα συνάρτησης, πριν καταλήξουμε στον ορισμό της κατακόρυφης εφαπτομένης. Αν $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, τότε, για να βρούμε την εφαπτομένη της f στο $O(0,0)$, θα υπολογίσουμε και πάλι το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x},$$

και, παίρνοντας τα πλευρικά όρια, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty,$$

ενώ:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{-\sqrt[3]{-x}} \frac{y=-x}{y \rightarrow 0^+} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\sqrt[3]{y}} = -\infty,$$

άρα το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει κι εδώ θα έπρεπε να πούμε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει εφαπτομένη στο $O(0,0)$ και να φύγουμε χωρίς τύψεις να βαραίνουν τη συνείδησή μας. Ας πάμε όμως να δούμε τι σημαίνουν τα δύο πλευρικά όρια που βρήκαμε.

Το πρώτο, το «εκ δεξιών», όπως και πριν, σημαίνει ότι, καθώς το σημείο Q πλησιάζει το σημείο O (βλ. σχήμα 1.17), τέμνουσες τείνουν να γίνουν κάθετες στον θετικό ημιάξονα Ox , άρα, προσεγγίζουν την ευθεία $x = 0$, δηλαδή τον άξονα $y'y$. Ανάλογα, το «εξ αριστερών» πλευρικό όριο, σημαίνει ότι, καθώς το σημείο Q' πλησιάζει το σημείο O (βλ. και πάλι σχήμα 1.17), οι τέμνουσες πλησιάζουν μια γωνία που έχει εφαπτομένη $-\infty$. Επειδή, προφανώς, δεν υπάρχει τέτοια γωνία, αν θυμηθούμε ξανά τη γραφική παράσταση της $f(x) = \sqrt[3]{x}$ τότε θα δούμε ότι, αφού το όριο:

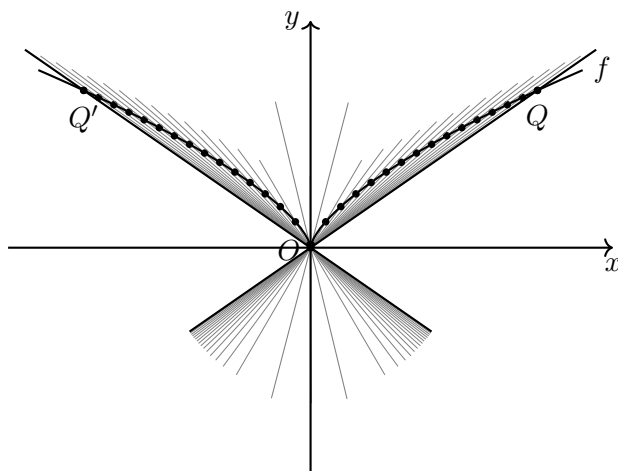
$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \varepsilon\varphi \theta = -\infty,$$

η γωνία που κρύβεται πίσω από όλα αυτά είναι, και πάλι, η γωνία²⁴ $\frac{\pi}{2}$, επομένως, και σε αυτήν την

²⁴Εδώ τώρα, κάποιοι μπορούν να γκρινιάζουν ότι και το όριο:

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{3\pi}{2}^+} \varepsilon\varphi \theta = -\infty,$$

περίπτωση, οι τέμνουσες πλησιάζουν μία ευθεία κάθετη στον άξονα $x'x$, δηλαδή, τον $y'y$. Άρα, αν και το όριο δεν υπάρχει, το γεγονός ότι και τα δύο πλευρικά όρια απειρίζονται μας εξασφαλίζει ότι οι τέμνουσες θα προσεγγίζουν μία ευθεία της μορφής $x = x_0$ (βλ. σχήμα 1.17).



Σχήμα 1.17: Η κατακόρυφη εφαπτομένη της f .

Δίνουμε τώρα τον ακόλουθο:

Ορισμός 2 (Κατακόρυφη εφαπτομένη)

Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση και έστω $x_0 \in A$ (όχι απαραίτητα στο εσωτερικό του). Τότε, θα λέμε ότι η f έχει κατακόρυφη εφαπτομένη στο x_0 την ευθεία $x = x_0$ αν ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty.$$

Προσέξτε ότι θέλουμε, σε αντίθεση με τις ασύμπτωτες, **και τα δύο πλευρικά όρια να απειρίζονται**. Για παράδειγμα, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.18, η συνάρτηση f δεν μπορεί να έχει εφαπτομένη, ούτε κατακόρυφη ούτε πλάγια, στο $O(0,0)$, όπου:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}.$$

Εδώ, αν και:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty,$$

έχουμε ότι:

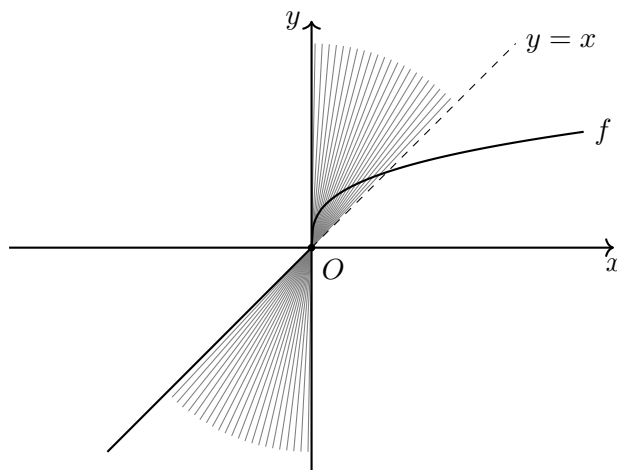
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = 1,$$

πράγμα που οδηγεί στην κατάσταση που έχουμε στο σχήμα 1.18.

1.9 Πλευρικές παράγωγοι

Είδαμε στα προηγούμενα πόσο σημαντικό ρόλο παίζουν, κατά τον υπολογισμό της παραγώγου σε ένα σημείο, τα δύο πλευρικά όρια, καθώς και πόση σημασία έχουν σε σχέση με τη γεωμετρική τους

αλλά, αν το σκεφτούμε ψύχραιμα, η επειδή μιλάμε για ευθείες και όχι για διανύσματα, το να έχουν δύο ευθείες γωνία ίση με $\frac{3\pi}{2}$ είναι ακριβώς το ίδιο με το να έχουν γωνία $\frac{\pi}{2}$, οπότε, το επιχείρημά μας δεν αλλάζει και σε αυτήν την περίπτωση.



Σχήμα 1.18: Οι «υποψήφιος» κατακόρυφες εφαπτόμενες της f .

ερμηνεία. Γι' αυτό, αποφασίζουμε να ορίσουμε και τις *πλευρικές παραγώγους* μίας συνάρτησης ως εξής²⁵:

Ορισμός 3 (Πλευρικές παράγωγοι)

Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση και $x_0 \in A$, τότε:

- αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε²⁶ $(x_0, x_0 + \delta) \subseteq A$, τότε ορίζουμε ως *εκ δεξιών πλευρική παράγωγο* της f στο x_0 και συμβολίζουμε με $f'_+(x_0)$ το όριο:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

αν το όριο αυτό υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

- αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε²⁷ $(x_0 - \delta, x_0) \subseteq A$, τότε ορίζουμε ως *εξ αριστερών πλευρική παράγωγο* της f στο x_0 και συμβολίζουμε με $f'_-(x_0)$ το όριο:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

αν το όριο αυτό υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Τώρα, ως άμεσο πόρισμα των παραπάνω ορισμών, παίρνουμε και την ακόλουθη πρόταση η οποία συνδέει τις πλευρικές παραγώγους με την παράγωγο μίας συνάρτησης σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της και είναι προφανής εφαρμογή της ανάλογης πρότασης για τα όρια:

Πρόταση 1

Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση και $x_0 \in A$ είναι ένα εσωτερικό²⁸ σημείο του A , τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 **αν και μόνον αν**:

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι προφανής αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν και μόνον αν υπάρχει και είναι

²⁵Τον συμβολισμό f'_+ και f'_- δεν τον υιοθετεί και το σχολικό βιβλίο, αλλά εμείς εδώ θα τον χρησιμοποιούμε για λόγους απλότητας και ευκολίας.

²⁶Θέλουμε λίγο χώρο από τα δεξιά, δηλαδή.

²⁷Θέλουμε λίγο χώρο από τα αριστερά, τώρα.

²⁸Προσέξτε ότι το γεγονός πως το x_0 είναι ένα εσωτερικό σημείο του A μας εξασφαλίζει την ύπαρξη και των δύο πλευρικών παραγώγων.

πραγματικός αριθμός το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

το οποίο, με τη σειρά του, ισχύει, αν και μόνον αν τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα, δηλαδή:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

ή, ισοδύναμα:

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0),$$

που ήταν το ζητούμενο.

Κλείνοντας τη συζήτηση για την παραγωγισιμότητα, δίνουμε τους ακόλουθους ορισμούς σε σχέση με την παραγωγισιμότητα μιας συνάρτησης σε ένα ανοικτό και ένα κλειστό διάστημα του πεδίου ορισμού της:

Ορισμός 4 (Παραγωγισιμότητα σε ανοικτά διαστήματα)

Μία συνάρτηση $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ θα λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο²⁹ (a, b) αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in (a, b)$.

Ορισμός 5 (Παραγωγισιμότητα σε κλειστά διαστήματα)

Μία συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ θα λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) και, επιπλέον, υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι $f'_+(a)$ και $f'_-(b)$.

Ας δούμε κι ένα παράδειγμα μετά από όλα αυτά.

Παράδειγμα 1

Να εξετάσετε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ως προς την παραγωγισιμότητα.

Αφού το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το κλειστό διάστημα $[-1, 1]$, θα εξετάσουμε ξεχωριστά το εσωτερικό του και ξεχωριστά τα άκρα του. Έστω, λοιπόν, $x_0 \in (-1, 1)$. Τότε, έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - x_0^2}}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - x_0^2})(\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - x_0^2})}{(x - x_0)(\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - x_0^2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 - x^2 - (1 - x_0^2)}{(x - x_0)(\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - x_0^2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0^2 - x^2}{(x - x_0)(\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - x_0^2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-(x - x_0)(x + x_0)}{(x - x_0)(\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - x_0^2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-(x + x_0)}{\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - x_0^2}} = \\ &= \frac{-2x_0}{2\sqrt{1 - x_0^2}} = \\ &= -\frac{x_0}{\sqrt{1 - x_0^2}}. \end{aligned}$$

Επομένως, η παράγωγος της f υπάρχει σε κάθε $x_0 \in (-1, 1)$ και μάλιστα είναι ίση με:

$$f'(x_0) = -\frac{x_0}{\sqrt{1 - x_0^2}}.$$

²⁹Παρατηρήστε ότι κάθε σημείο $x_0 \in (a, b)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του (a, b) (γιατί;).

Εξετάζουμε τώρα την παραγωγισιμότητα στο -1 :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1} \stackrel{y=x+1}{\underset{y \rightarrow 0^+}} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-(y-1)^2}}{y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2y-y^2}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{y(2-y)}}{y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{y}\sqrt{2-y}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2-y}}{\sqrt{y}} = +\infty,\end{aligned}$$

επομένως, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο -1 . Όμοια, βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} \stackrel{y=x-1}{\underset{y \rightarrow 0^-}} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-(y+1)^2}}{y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-2y-y^2}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-y(2-y)}}{y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-y}\sqrt{2-y}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-y}}{-\sqrt{-y}} = -\infty,\end{aligned}$$

επομένως, η f δεν είναι παραγωγίσιμη ούτε στο 1 .

Κεφάλαιο 2

Η παράγωγος συνάρτηση

2.1 Ο ορισμός της παραγώγου συνάρτησης

Ωραία, εξαιρετικά, ανεπανάληπτα! Βρήκαμε εύκολο τρόπο να βρίσκουμε την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης σε ένα σημείο της χωρίς να χρειάζεται να χρησιμοποιούμε περίπλοκους γεωμετρικούς ισχυρισμούς ή να απλοποιούμε παραστάσεις χωρίς να έχουμε την απαραίτητη μαθηματική αυστηρότητα. Ας δούμε όμως λίγο αυτήν την κατασκευή που κάναμε πιο γενικά. Για κάθε αριθμό x_0 του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης στο οποίο αυτή είναι παραγωγίσιμη, βρήκαμε ότι υπάρχει ένας¹ αριθμός $f'(x_0)$ ο οποίος να ισούται με την κλίση της εφαπτομένης της συνάρτησης f στο x_0 . Με άλλα λόγια, κατασκευάσαμε μία συνάρτηση από το σύνολο των αριθμών στους οποίους η f είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των αριθμών. Αυτό διατυπώνεται στον ακόλουθο

Ορισμός 6 (Παράγωγος συνάρτηση)

Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση και έστω $B \subseteq A$ το σύνολο των σημείων στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Τότε, αν $x \in B$, ορίζουμε την *παράγωγο συνάρτηση της f* και τη συμβολίζουμε με $f' : B \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι η συνάρτηση:

$$x \mapsto \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

δηλαδή, ορίζουμε:

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

για κάθε $y \in B$.

Με άλλα λόγια, η παράγωγος συνάρτηση της f μας δίνει, για κάθε x , την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $P(x, f(x))$, αν, προφανώς, αυτή υπάρχει. Επομένως, για κάθε συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη, μπορούμε να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση που να μας δίνει πληροφορίες σε σχέση με την κλίση των εφαπτόμενων της f σε όσα σημεία του πεδίου ορισμού της αυτή είναι παραγωγίσιμη. Όπως είδαμε και στο σχήμα 1.13, οι εφαπτόμενες μίας συνάρτησης μπορούν να μας δώσουν αρκετές πληροφορίες σε σχέση με την ίδια τη συνάρτηση, άρα, όπως θα δούμε και σε όλο το υπόλοιπο κεφάλαιο, έχει μεγάλη σημασία η μελέτη της παραγώγου συνάρτησης. Πριν όμως προχωρήσουμε σε όλα αυτά, όπως κάναμε και με τα όρια και με τη συνέχεια, θα εξετάσουμε πρώτα όλες τις βασικές συναρτήσεις ως προς την παραγωγισιμότητα, θα μελετήσουμε τις πράξεις μεταξύ συναρτήσεων και θα διατυπώσουμε σχετικούς κανόνες για αυτές. Έπειτα από όλα αυτά θα δούμε και κάποια κεντρικά αποτελέσματα που αφορούν τις παραγώγους. Προχωράμε, πρώτα, στις παραγώγους ανώτερης τάξης.

¹Και μοναδικός, αφού το όριο είναι πάντα μοναδικό.

2.2 Παράγωγοι ανώτερης τάξης

Είδαμε ότι μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζει μία άλλη συνάρτηση $f' : B \rightarrow \mathbb{R}$, όπου B είναι το σύνολο των σημείων στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Έτσι, έχουμε στα χέρια μας, πια, μια νέα συνάρτηση, την οποία μπορούμε να παραγωγίσουμε ξανά, αν αυτή είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο σημείο και, έτσι, να πάρουμε μια άλλη συνάρτηση που θα είναι η παράγωγος της f' και την οποία ονομάζουμε *δεύτερη παράγωγο* της f . Με τον ίδιο τρόπο, ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$f^{(k)} : B_{k-1} \rightarrow \mathbb{R},$$

με:

$$f^{(k)}(x) = (f^{(k-1)}(x))',$$

να είναι η παράγωγος τάξης k της f , όπου B_{k-1} είναι το σύνολο των σημείων στα οποία η $f^{(k-1)}$ είναι παραγωγίσιμη. Οι παράγωγοι υψηλότερων τάξεων δε μας δίνουν τόσες πολλές πληροφορίες για τη συνάρτηση f όπως η πρώτη παράγωγος, εκτός ίσως από τη δεύτερη παράγωγο, όπως θα δούμε σε επόμενη ενότητα.

2.3 Μια φυσική ερμηνεία της παραγώγου, για να μην βαριόμαστε

Πριν όμως πάμε στα τυπικά και σε μια σειρά από αποδείξεις που ακολουθεί² ας δούμε και μία πολύ χρήσιμη εφαρμογή των παραγώγων στη φυσική. Θεωρήστε ένα σώμα που εκτελεί μία κίνηση, ευθύγραμμη, κατά προτίμηση, και του οποίου η θέση μεταβάλλεται σε σχέση με τον χρόνο σύμφωνα με μια εξίσωση $x(t)$, για $t \geq 0$ ³. Ας πούμε ότι θέλουμε να βρούμε την ταχύτητα του σώματος αυτό σαν συνάρτηση του χρόνου, αναζητούμε, δηλαδή, μία συνάρτηση $v : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ που να μας δίνει για κάθε χρονική στιγμή t την ταχύτητα του σώματος, $v(t)$.

Για να βρούμε αυτό που θέλουμε πρέπει πρώτα να σκεφτούμε το εξής: τι είναι η ταχύτητα;⁴ Πρακτικά, αυτό που μας νοιάζει εδώ είναι η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος, την οποία δεν ξέρουμε, μέχρι τώρα, κάποιον τρόπο να τη βρούμε. Αλλά, ας σκεφτούμε ψύχραιμα. Ας θεωρήσουμε έναν πολύ μικρό αριθμό h , είτε θετικό είτε αρνητικό, κοντά στο 0. Για δική μας ευκολία, ας υποθέσουμε ότι είναι θετικός. Τότε, στο χρονικό διάστημα $(t, t+h)$, για κάποια χρονική στιγμή t , το σώμα δεν αλλάζει την ταχύτητά του ιδιαίτερα πολύ⁵, οπότε, μπορούμε να φανταστούμε ότι η ταχύτητά του θα είναι, κατά προσέγγιση:

$$v(t) \approx \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{x(t+h) - x(t)}{t+h-t} = \frac{x(t+h) - x(t)}{h}.$$

Ε, τώρα φαίνεται πού πάει η κατάσταση! Για να ξεφορτωθούμε αυτό το \approx που μας χαλάει τη δουλειά, θα πούμε πρώτα ότι το σώμα μπορεί να μην έχει όντως σταθερή ταχύτητα σε αυτό το διάστημα, αλλά, οπωσδήποτε, ο λόγος

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h},$$

για πολύ μικρά h , είναι μια καλή εκτίμηση της ταχύτητας τη χρονική στιγμή t . Μετά, για να βρούμε ακριβώς την ταχύτητα, θα επιτρέψουμε στο h να πάει στο 0, οπότε θα έχουμε:

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = x'(t),$$

²Εκκάθαρα αντιεμπορική η όλη παρουσίαση, αλλά τι να κάνουμε...

³Όχι ότι είναι αμαρτία να μιλάμε για αρνητικούς χρόνους, αλλά δεν το συνηθίζουμε.

⁴Τι είναι ο άνθρωπος; Τι είναι η ζωή; Τι είναι ο κόσμος ο ίδιος; Τι λέμε τώρα;

⁵Κι αν αλλάζει την ταχύτητά του πολύ, μπορούμε να πάρουμε h αρκετά μικρό έτσι ώστε να μην την αλλάζει πολύ (αλήθεια, γιατί!).

δηλαδή:

«Η ταχύτητα $v(t)$ ενός κινούμενου σώματος με συνάρτηση θέσης $x(t)$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης του, δηλαδή $v(t) = x'(t)$ ».

Ανάλογα, αν σκεφτούμε με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να δούμε ότι σε κάθε χρονική στιγμή t ισχύει ότι:

$$a(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} = v'(t) = x''(t),$$

δηλαδή η επιτάχυνση είναι η παράγωγος της ταχύτητας ή, για να αναχθούμε και πάλι στη συνάρτηση θέσης:

«Η επιτάχυνση $a(t)$ ενός κινούμενου σώματος με συνάρτηση θέσης $x(t)$ είναι η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης θέσης του, δηλαδή $a(t) = x''(t)$ ».

Στις δύο παραπάνω περιπτώσεις, είχαμε μία βασική σχέση που συνέδεε τα μεγέθη μεταξύ τους: η ταχύτητα είναι ο ρυθμός μεταβολής της θέσης και η επιτάχυνση είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας. Έτσι, μπορούμε να γενικεύσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα με τον εξής τρόπο. Αν $\phi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ένα οποιοδήποτε φυσικό μέγεθος που μεταβάλλεται σαν συνάρτηση του χρόνου, τότε, αν h είναι ένας μικρός αριθμός, ας υποθέσουμε θετικός, τότε στο χρονικό διάστημα $(t, t+h)$ ο ρυθμός μεταβολής του ϕ θα μπορεί να εκτιμηθεί από τον λόγο μεταβολής:

$$\frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h},$$

επομένως, παίρνοντας όρια καθώς $h \rightarrow 0$, μπορούμε να βρούμε τον ακριβή ρυθμό μεταβολής του μεγέθους ϕ , μπορούμε να πούμε ότι αυτός είναι ίσος με:

$$\text{ρυθμός μεταβολής του } \phi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} = \phi'(x).$$

Αυτή η φυσική ερμηνεία της (πρώτης) παραγώγου σαν ρυθμός μεταβολής, πέρα από την κλίση της εφαπτομένης σε ένα σημείο, θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη στα επόμενα.

2.4 Οι παράγωγοι των βασικών συναρτήσεων

Όπως φαντάζεστε, αυτό που θα κάνουμε είναι να πάρουμε όλες τις βασικές συναρτήσεις και να δείξουμε ότι είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους. Ε, περίπου αυτό θα κάνουμε, αλλά όχι ακριβώς γιατί θα συναντήσουμε όρισμένα προβλήματα στη διαδικασία αυτή.

2.4.1 Η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε, για $x \neq x_0$ έχουμε⁶:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0,$$

οπότε:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0,$$

δηλαδή, η παράγωγος συνάρτηση της f είναι η:

$$f'(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

⁶ Απλοποιούμε πρώτα την παράσταση και μετά θα πάρουμε το όριο της, για να μην γράφουμε όλη την ώρα \lim χωρίς ουσιαστικό λόγο.

2.4.2 Η ταυτοτική συνάρτηση $f(x) = x$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε, για $x \neq x_0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1,$$

οπότε:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1,$$

δηλαδή, η παράγωγος συνάρτηση της f είναι η:

$$f'(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2.4.3 Το μονώνυμο $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε, για $x \neq x_0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \\ &= \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} = \\ &= x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1}, \end{aligned}$$

οπότε:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) = \\ &= \underbrace{x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \dots + x_0^{n-1} + x_0^{n-1}}_{n \text{ όροι}} = \\ &= n x_0^{n-1}, \end{aligned}$$

δηλαδή, η παράγωγος συνάρτηση της f είναι η⁷:

$$f'(x) = n x^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2.4.4 Η τετραγωνική ρίζα $f(x) = \sqrt{x}$

Εδώ έχουμε ένα μικρό θέμα. Έστω, αρχικά, $x_0 > 0$, οπότε, για $x \neq x_0$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \\ &= \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}, \end{aligned}$$

οπότε:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

⁷Συνηθίζουμε, όταν μιλάμε για την παράγωγο συνάρτηση, να αντικαθιστούμε το x_0 με κάποια μεταβλητή (x, t, \dots) που να μην έχει δείκτη μιας και, συνήθως, όταν χρησιμοποιούμε δείκτες, υπονοούμε ότι έχουμε πάρει μια σταθερή τιμή της εν λόγω μεταβλητής. Ίσως να είναι και ψυχαναγκασμός, βέβαια...

Για το 0 έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

πότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty,$$

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Τελικά, η παράγωγος της f είναι η:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

2.4.5 Η υπερβολή $f(x) = \frac{1}{x}$

Έστω $x_0 \neq 0$. Τότε, για $x \neq x_0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \frac{\frac{x_0 - x}{xx_0}}{x - x_0} = \\ &= -\frac{1}{xx_0}, \end{aligned}$$

οπότε:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(-\frac{1}{xx_0} \right) = -\frac{1}{x_0^2}, \end{aligned}$$

δηλαδή, η παράγωγος συνάρτηση της f είναι η:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

2.4.6 Η συνάρτηση του ημιτόνου $f(x) = \eta\mu x$

Εδώ θα παίζουμε με εκείνη την εναλλακτική μορφή του ορισμού της παραγώγου που είναι εμπνευσμένη από την μέθοδο των Barrow και Fermat, κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $h = x - x_0$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{h=x-x_0}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Έστω, λοιπόν, $h \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{\eta\mu(x_0 + h) - \eta\mu x_0}{h} = \\ &= \frac{\eta\mu x_0 \sigma\upsilon\nu h + \eta\mu h \sigma\upsilon\nu x_0 - \eta\mu x_0}{h} = \\ &= \frac{\eta\mu x_0(\sigma\upsilon\nu h - 1) + \eta\mu h \sigma\upsilon\nu x_0}{h} = \\ &= \eta\mu x_0 \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} + \frac{\eta\mu h}{h} \sigma\upsilon\nu x_0, \end{aligned}$$

οπότε, αφού έχουμε ότι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} = 0 \text{ και } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu h}{h} = 1,$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\eta\mu x_0 \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} + \frac{\eta\mu h}{h} \sigma\upsilon\nu x_0 \right) = \sigma\upsilon\nu x_0, \end{aligned}$$

δηλαδή, η παράγωγος συνάρτηση της f είναι η:

$$f'(x) = \sigma\upsilon\nu x.$$

2.4.7 Η συνάρτηση του ημιτόνου $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$

Εδώ θα παίξουμε ξανά⁸ με εκείνη την εναλλακτική μορφή του ορισμού της παραγώγου που είναι εμπνευσμένη από την μέθοδο των Barrow και Fermat, κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $h = x - x_0$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{h=x-x_0}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Έστω, λοιπόν, $h \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{\sigma\upsilon\nu(x_0 + h) - \sigma\upsilon\nu x_0}{h} = \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu x_0 \sigma\upsilon\nu h - \eta\mu h \eta\mu x_0 - \sigma\upsilon\nu x_0}{h} = \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu x_0 (\sigma\upsilon\nu h - 1) - \eta\mu h \eta\mu x_0}{h} = \\ &= \sigma\upsilon\nu x_0 \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} - \frac{\eta\mu h}{h} \eta\mu x_0, \end{aligned}$$

οπότε, αφού έχουμε ότι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} = 0 \text{ και } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu h}{h} = 1,$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sigma\upsilon\nu x_0 \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} - \frac{\eta\mu h}{h} \eta\mu x_0 \right) = -\eta\mu x_0, \end{aligned}$$

δηλαδή, η παράγωγος συνάρτηση της f είναι η:

$$f'(x) = -\eta\mu x.$$

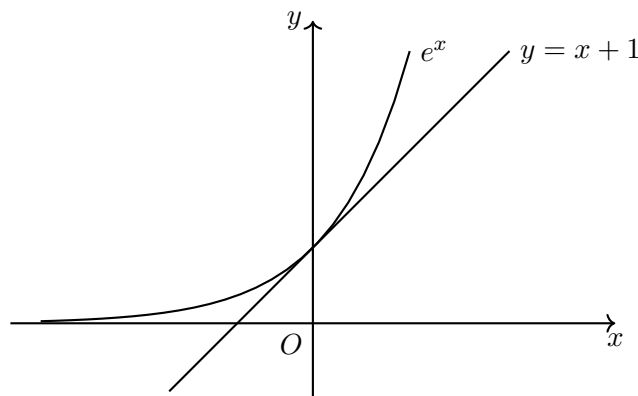
2.4.8 Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$

Για την παραγωγισιμότητα της εκθετικής συνάρτησης θα χρειαστούμε αρκετή δουλίτσα. Αρχικά, θα αποδείξουμε ότι η $f(x) = e^x$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, δεχόμενοι την ακόλουθη ανισότητα:

$$e^x \geq x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η απόδειξη αυτής της ανισότητας μπορεί να ξεφεύγει αρκετά από την ύλη μας αλλά μπορούμε να έχουμε τη συνείδησή μας λίγο πιο ήσυχη αν ρίξουμε μια ματιά στο σχήμα 2.1.

⁸Ο κύριος λόγος που επιλέγουμε την άλλη μορφή είναι γιατί έχουμε αυτές τις χρήσιμες ταυτότητες για το ημίτονο και το συνημίτονο αθροίσματος γωνιών.



Σχήμα 2.1: Η ανισότητα $e^x \geq x + 1$.

Τώρα, αυτήν την ανισότητα μπορούμε να την «πειράξουμε» αρκετά, αφού ισχύει για κάθε αριθμό $x \in \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να βάλουμε στη θέση του x ό,τι μα ό,τι θέλουμε και να πάρουμε μια ανισότητα που να ισχύει. Για παράδειγμα, μπορούμε να βάλουμε το $-x$ στη θέση του x , οπότε θα πάρουμε την ανισότητα:

$$e^{-x} \geq -x + 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

η οποία μπορεί να ξαναγραφτεί και ως:

$$\frac{1}{e^x} \geq 1 - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Όλα τα παραπάνω θα τα χρησιμοποιήσουμε στην ακόλουθη:

Πρόταση 2 (Παραγωγισιμότητα στο 0)

Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 και, μάλιστα:

$$f'(0) = 1.$$

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

αφού

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^x - 1}{x}.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τις πλευρικές παραγώγους για να δείξουμε το παραπάνω.

- Για την $f'_+(0)$, έχουμε, αφ' ενός:

$$e^x \geq x + 1 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq x \xLeftrightarrow{x>0} \frac{e^x - 1}{x} \geq 1,$$

αφ' ετέρου, για x κοντά στο 0:

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^x} &\geq -x + 1 \xLeftrightarrow{x>0} \frac{1}{1-x} \geq e^x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{1-x} - 1 &\geq e^x - 1 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} \geq e^x - 1 \xLeftrightarrow{x>0} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{1-x} &\geq \frac{e^x - 1}{x}. \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας τις δύο παραπάνω ανισότητες, έχουμε:

$$1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq \frac{1}{1 - x}, \text{ για } x > 0 \text{ και κοντά στο } 0.$$

Επειδή:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - x} = 1,$$

από το Κριτήριο Παρεμβολής παίρνουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

δηλαδή:

$$f'_+(0) = 1.$$

- Για την $f'_-(0)$, ανάλογα, έχουμε, αφ' ενός:

$$e^x \geq x + 1 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq x \xLeftrightarrow{x < 0} \frac{e^x - 1}{x} \leq 1,$$

αφ' ετέρου, για x κοντά στο 0:

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^x} &\geq -x + 1 \xLeftrightarrow{1-x > 0} \frac{1}{1-x} \geq e^x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{1-x} - 1 &\geq e^x - 1 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} \geq e^x - 1 \xLeftrightarrow{x < 0} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{1-x} &\leq \frac{e^x - 1}{x}. \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας τις δύο παραπάνω ανισότητες, έχουμε:

$$1 \geq \frac{e^x - 1}{x} \geq \frac{1}{1 - x}, \text{ για } x < 0 \text{ και κοντά στο } 0.$$

Επειδή:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 - x} = 1,$$

από το Κριτήριο Παρεμβολής παίρνουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

δηλαδή:

$$f'_-(0) = 1.$$

Από τα δύο παραπάνω παίρνουμε ότι:

$$f'_+(0) = f'_-(0) = 1,$$

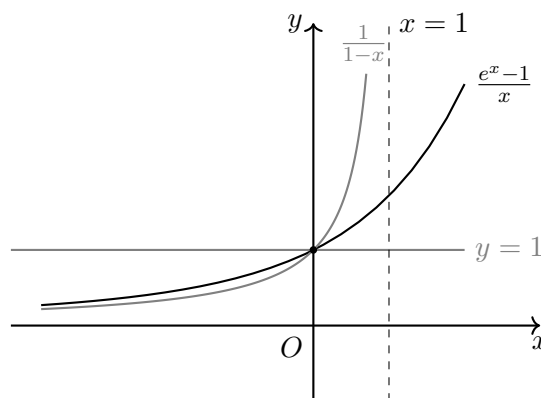
οπότε, άμεσα έπεται ότι:

$$f'(0) = 1,$$

που ήταν το ζητούμενο.

Οι δύο ανισότητες που χρησιμοποιήθηκαν στην παραπάνω απόδειξη φαίνονται και στο σχήμα 2.2.

Τώρα πια είναι αρκετά πιο εύκολο να δείξουμε ότι η $f(x) = e^x$ είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της.



Σχήμα 2.2: Η ανισότητες που χρησιμοποιήσαμε για την εύρεση της $f'(0) = 1$.

Πρόταση 3 (Παραγωγισιμότητα της e^x)

Η $f(x) = e^x$ είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της και μάλιστα:

$$f'(x) = e^x.$$

Απόδειξη

Σε αυτήν την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε τον άλλο τρόπο γραφής της παραγώγου, αξιοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής $h = x - x_0$:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{h=x-x_0}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0}e^h - e^{x_0}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0}(e^h - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{x_0} \frac{e^h - 1}{h}. \end{aligned}$$

Εδώ παρατηρούμε ότι το όριο:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h},$$

είναι ακριβώς η παράγωγος της f στο 0, επομένως, από την προηγούμενη πρόταση, υπάρχει και είναι ίσο με:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = f'(0) = 1,$$

οπότε:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} e^{x_0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0},$$

δηλαδή, η παράγωγος της $f(x) = e^x$ είναι η:

$$f'(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Για τις υπόλοιπες βασικές συναρτήσεις (εφαπτομένη και λογάριθμος) θα δούμε σε επόμενη ενότητα τα σχετικά αποτελέσματα.

2.5 Κανόνες παραγώγισης

Είδαμε κάποιες από τις βασικές συναρτήσεις, είναι ώρα τώρα να δούμε και τι γίνεται με τις πράξεις μεταξύ συναρτήσεων και την παραγώγιση· τι γίνεται, δηλαδή, με το άθροισμα συναρτήσεων, με τη διαφορά, με το γινόμενο κ.λπ., όπου, όπως θα δούμε, τα πράγματα δεν είναι τόσο αναμενόμενα.

2.5.1 Παράγωγος αθροίσματος

Ας πάρουμε δύο συναρτήσεις $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε, όπως έχουμε δει, η παράγωγος της f σε εκείνο το σημείο εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της f ως προς το x και η παράγωγος της g τον ρυθμό μεταβολής της g ως προς το x . Αντίστοιχα, η παράγωγος της $f + g$ εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της $f + g$ ως προς το x , οπότε, όπως εύλογα θα φανταζόταν κανείς, αναμένουμε αυτός ο ρυθμός μεταβολής να είναι ίσος με το άθροισμα των άλλων δύο, δηλαδή να ισχύει:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Για να το καταλάβουμε αυτό λίγο καλύτερα, μπορούμε να ρίξουμε μια ματιά στο σχήμα 2.3, στο οποίο φαίνεται και η κεντρική ιδέα του παραπάνω συλλογισμού. Αν πάρουμε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα⁹ dt , τότε, σε εκείνο το διάστημα, το μέγεθος f θα έχει μεταβληθεί κατά κάποια ποσότητα, ας την ονομάσουμε df και, αντίστοιχα, το μέγεθος g θα έχει μεταβληθεί κατά κάποια ποσότητα dg . Έτσι, η νέα τιμή του, στο τέλος του διαστήματος dt θα είναι $f + df$ για το ένα και $g + dg$, για το άλλο. Επίσης, το άθροισμά τους, θα έχει μεταβληθεί, προφανώς, κατά την ποσότητα $df + dg$, οπότε, είναι εύλογο να πούμε ότι ο ρυθμός μεταβολής του αθροίσματος, σε αυτό το χρονικό διάστημα dt είναι:

$$\frac{df + dg}{dt} = \frac{df}{dt} + \frac{dg}{dt},$$

δηλαδή, αν «διαβάσουμε» τα παραπάνω με τον συμβολισμό του Leibniz για την παράγωγο, παίρνουμε τη σχέση:

$$(f + g)' = f' + g'.$$

Επειδή όμως αυτά δεν είναι αυστηρά μαθηματικά, ας δούμε τώρα πώς μεταφράζονται αυτά στα μαθηματικένια.

Πρόταση 4 (Παράγωγος αθροίσματος)

Αν $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις, $x_0 \in A$ ένα εσωτερικό σημείο του A και οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε και η $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και μάλιστα:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Απόδειξη

Αφού οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έπεται ότι τα ακόλουθα όρια υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Για την παράγωγο της $f + g$ στο x_0 , έχουμε:

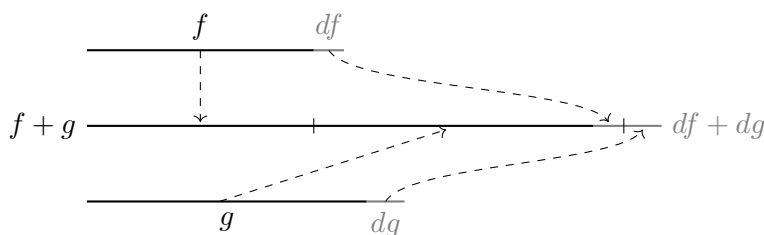
$$\begin{aligned} (f + g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= f'(x_0) + g'(x_0), \end{aligned}$$

που ήταν και το ζητούμενο.

⁹ Σε αυτόν αλλά και στους επόμενους κανόνες παραγωγίσισης, αντί να παίρνουμε ένα πολύ μικρό h και να γράφουμε το χρονικό διάστημα σαν $(t, t + h)$ ή $(t - h, t)$, θα το συμβολίζουμε όλο μαζί σαν dt , πράγμα που θυμίζει έντονα τον συμβολισμό του Leibniz για την παράγωγο:

$$\frac{df}{dt}(x),$$

ο οποίος, όπως θα δείτε, αν και ανακριβής, θα μας διευκολύνει πάρα πολύ στους συλλογισμούς μας.



Σχήμα 2.3: Η παράγωγος αθροίσματος.

2.5.2 Παράγωγος βαθμωτού γινομένου

Έχουμε πει ότι ως βαθμωτό πολλαπλασιασμό εννοούμε τον πολλαπλασιασμό ενός αριθμού (του βαθμωτού) με μία συνάρτηση. Επομένως, αυτό που θα δείξουμε τώρα είναι ένας κανόνας που θα αφορά τη συνάρτηση λf , όπου λ είναι ένας αριθμός και f μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Ας σκεφτούμε πάλι με ρυθμούς μεταβολής. Η παράγωγος της f είναι ο ρυθμός μεταβολής της f και η παράγωγος της λf είναι ο ρυθμός μεταβολής της λf , οπότε, η πρώτη σκέψη που μας έρχεται στο μυαλό, είναι ότι, αν έχουμε ένα μέγεθος που μεταβάλλεται με ρυθμό f' , τότε, αν το πολλαπλασιάσουμε με έναν αριθμό, π.χ. το πενταπλασιάσουμε, τότε αυτό το μέγεθος θα μεταβάλλεται με τον πενταπλάσιο ρυθμό. Για παράδειγμα, σκεφτείτε ότι κάνετε βήματα μήκους ενός (1) μέτρου και ότι κινείστε με ταχύτητα¹⁰ $1m/s$. Τότε, αν ξαφνικά πιείτε ένα μαγικό φίλτρο και γίνετε ένας τεράστιος γίγαντας με βήμα πέντε (5) μέτρα, προφανώς, εσείς μπορεί να κάνετε βήματα με τον ίδιο ρυθμό, αλλά στον ίδιο χρόνο θα κάνετε πια πενταπλάσια απόσταση, δηλαδή θα κινείστε με ταχύτητα $5m/s$.

Ένας άλλος τρόπος να το σκεφτούμε αυτό είναι ως εξής. Ας πούμε ότι η f αναπαριστά ένα μήκος που μεταβάλλεται με κάποιον τρόπο σαν συνάρτηση του χρόνου. Κατασκευάζουμε εμείς ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με τη μία του πλευρά να έχει σταθερό μήκος λ και την άλλη να έχει μεταβαλλόμενο μήκος $f(t)$ ανάλογα με τη χρονική στιγμή στην οποία βρισκόμαστε. Έτσι, το εμβαδόν του ορθογωνίου μας δίνεται από τη συνάρτηση λf . Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε και ένα αρκετά μικρό χρονικό διάστημα dt , οπότε, σε αυτό το χρονικό διάστημα, η πλευρά f θα έχει μεταβληθεί κατά ένα μήκος df . Τότε, οι νέες διαστάσεις του ορθογωνίου θα είναι λ (η μία πλευρά παραμένει σταθερή) και $f + df$, οπότε, το νέο του εμβαδό θα είναι ίσο με:

$$\lambda(f + df) = \lambda f + \lambda df.$$

Αφού το αρχικό εμβαδόν ήταν λf , η μεταβολή του εμβαδού σε αυτό το χρονικό διάστημα θα είναι ίση με:

$$\lambda f + \lambda df - \lambda f = \lambda df.$$

Επομένως, αν διαιρέσουμε με dt θα πάρουμε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού (δηλαδή της συνάρτησης (λf)) στο χρονικό διάστημα dt :

$$\lambda \frac{df}{dt},$$

οπότε, επαληθεύουμε έτσι και τον κανόνα:

$$(\lambda f)' = \lambda f'.$$

Όλη αυτή η κατασκευή φαίνεται και στο σχήμα 2.4.

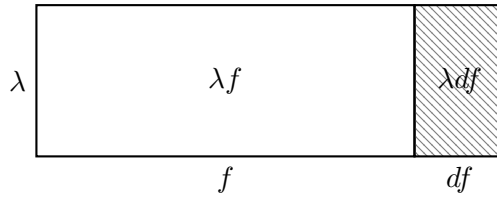
Ας δούμε τώρα και την τυπική απόδειξη του παραπάνω.

Πρόταση 5 (Παράγωγος βαθμωτού γινομένου)

Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$ ένα εσωτερικό σημείο του A στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη, τότε:

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$

¹⁰Η ταχύτητα, όπως είπαμε, είναι ο ρυθμός μεταβολής της θέσης.



Σχήμα 2.4: Η παράγωγος βαθμωτού γινομένου.

Απόδειξη

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, το παρακάτω όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Για την παράγωγο της λf στο x_0 αρκεί να υπολογίσουμε το όριο:

$$\begin{aligned} (\lambda f)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\lambda f(x) - \lambda f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\lambda(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lambda f'(x_0), \end{aligned}$$

οπότε έχουμε αποδείξει το ζητούμενο.

Από τους δύο παραπάνω κανόνες παραγωγίσιμης μπορούμε να πάρουμε σαν πόρισμα κάτι πολύ χρήσιμο:

Πόρισμα 1 (Παραγωγισιμότητα πολυωνύμων)

Αν $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία πολυωνυμική συνάρτηση, δηλαδή:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

τότε η p είναι παραγωγίσιμη και, μάλιστα η παράγωγός της είναι κι αυτή πολυώνυμο, επομένως, η p είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη¹¹.

Απόδειξη

Έχουμε αποδείξει ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η σταθερή συνάρτηση και οι συναρτήσεις:

$$p_n(x) = x^n,$$

είναι παραγωγίσιμες σε όλο το πεδίο ορισμού τους και μάλιστα:

$$p'_n(x) = nx^{n-1}, \text{ για κάθε } n \geq 2,$$

$(x)' = 1$ και $(a_0)' = 0$, επομένως, αφού μία πολυωνυμική συνάρτηση είναι άθροισμα βαθμωτών γινομένων των παραπάνω συναρτήσεων, θα είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και μάλιστα, η παράγωγός της θα είναι ίση με:

$$p'(x) = a_n n x^{n-1} + a_{n-1} (n-1) x^{n-2} + \dots + a_1,$$

που είναι, και πάλι, πολυωνυμική συνάρτηση, άρα παραγωγίσιμη. Έτσι, αφού η παράγωγος μιας πολυωνυμικής συνάρτησης είναι πολυωνυμική συνάρτηση, έπεται ότι αυτή είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη.

Άρα, έχουμε προσθέσει στη λίστα μας με τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις και όλες τις πολυωνυμικές συναρτήσεις.

¹¹Πολλές φορές, λέμε ότι μια τέτοια συνάρτηση είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη.

2.5.3 Η σχέση ανάμεσα στην παραγωγισιμότητα και τη συνέχεια

Για τους επόμενους κανόνες, θα μας χρειαστεί και ένα παραπάνω αποτέλεσμα που συνδέει την παραγωγισιμότητα μίας συνάρτησης με τη συνέχειά της σε εκείνο το σημείο. Η ιδέα είναι αρκετά απλή, αν σκεφτεί κανείς ότι το να είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα σημείο ισοδυναμεί με το να έχει εφαπτομένη σε εκείνο το σημείο. Αν όμως η συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε εκείνο το σημείο, αν δηλαδή κάνει ένα «πηδηματάκι», πώς θα μπορούσαμε να φέρουμε την εφαπτομένη της; Δε θα μπορούσαμε. Επομένως, η συνέχεια είναι *αναγκαία* υπόθεση για να έχουμε και παραγωγισιμότητα της συνάρτησης σε ένα σημείο¹² Αυτό διατυπώνεται στην ακόλουθη

Πρόταση 6

Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση και $x_0 \in A$ είναι ένα σημείο στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη, τότε η f είναι και συνεχής στο x_0 .

Απόδειξη

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , το παρακάτω όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Για $x \neq x_0$, θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

οπότε, επιλύοντας ως προς $f(x)$, έχουμε:

$$f(x) = g(x)(x - x_0) + f(x_0).$$

Παίρνοντας όρια στην παραπάνω σχέση, έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x)(x - x_0) + f(x_0)) = \\ &= f'(x_0)(x_0 - x_0) + f(x_0) = \\ &= f(x_0), \end{aligned}$$

άρα η f είναι συνεχής στο x_0 , που ήταν και το ζητούμενο.

Να παρατηρήσουμε εδώ ότι το αντίστροφο, προφανώς, δεν ισχύει, αφού η συνάρτηση $f(x) = |x|$, όπως είδαμε (βλ. σχήμα 1.14) δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, είναι όμως συνεχής εκεί.

2.5.4 Παράγωγος γινομένου συναρτήσεων

Ως εδώ, όλα έχουν πάει πολύ καλά και όλοι οι κανόνες παραγωγίσιμης που είδαμε δίνουν, σε γενικές γραμμές, αναμενόμενα αποτελέσματα. Αν, λοιπόν, πάρουμε δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, θα περιμέναμε να ισχύει ο κανόνας:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g'(x).$$

Αλλά, επειδή σε αυτήν τη ζωή δεν μπορούμε να τα έχουμε όλα, αν δοκιμάσουμε να πάρουμε για $f(x) = x$ και για $g(x) = x^2$, τότε, αφ' ενός έχουμε:

$$f'(x) = 1 \text{ και } g'(x) = 2x,$$

αφ' ετέρου έχουμε $(f \cdot g)(x) = x \cdot x^2 = x^3$, οπότε:

$$(f \cdot g)'(x) = (x^3)' = 3x^2,$$

¹²Όπως θα δούμε σε λίγο, όμως, δεν είναι και *ικανή*.

το οποίο είναι διαφορετικό από το γινόμενο:

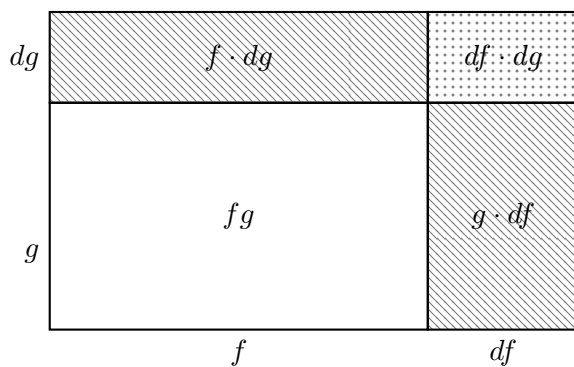
$$f'(x)g'(x) = 1 \cdot 2x = 2x,$$

άρα, ο κανόνας που θα θέλαμε να ισχύει και μοιάζει «φυσιολογικός», δεν ισχύει.

Αν δεν ισχύει αυτό, τότε τι ισχύει; Για να το βρούμε αυτό θα χρειαστούμε κι εδώ λίγη δουλειά. Ας κάνουμε ένα σχήμα παρόμοιο με το σχήμα 2.4, δηλαδή, θα υποθέσουμε ότι οι $f(t)$ και $g(t)$ αναπαριστούν μήκη που μεταβάλλονται με τον χρόνο και θα σχεδιάσουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές f και g , συνεπώς, το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι ίσο κάθε στιγμή με τη συνάρτηση $f \cdot g$. Στη συνέχεια, θεωρούμε ένα μικρό χρονικό διάστημα dt , οπότε, η μία πλευρά θα έχει μεταβληθεί κατά ένα μήκος df και η άλλη κατά ένα άλλο μήκος dg . Τότε, το εμβαδό του ορθογωνίου στο τέλος αυτού του χρονικού διαστήματος θα είναι ίσο με:

$$(f + df)(g + dg) = f \cdot g + f \cdot dg + g \cdot df + df \cdot dg,$$

όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.5.



Σχήμα 2.5: Η παράγωγος γινομένου συναρτήσεων.

Επομένως, το εμβαδόν του ορθογωνίου, κατά το χρονικό διάστημα dt μεταβλήθηκε κατά:

$$f \cdot g + f \cdot dg + g \cdot df + df \cdot dg - f \cdot g = f \cdot dg + g \cdot df + df \cdot dg.$$

Εδώ τώρα, μια φωνή στο κεφάλι μάς θυμίζει αυτά που έκαναν στον καιρό του Leibniz και των προγενέστερών του, Barrow και Fermat. Αφού το χρονικό διάστημα dt είναι πολύ μικρό, και οι μεταβολές df και dg θα είναι πολύ μικρές, άρα το γινόμενό του, $df \cdot dg$, θα είναι ακόμα μικρότερο, άρα, μπορούμε να το αγνοήσουμε. Επομένως, η μεταβολή του εμβαδού του ορθογωνίου (δηλαδή, η μεταβολή της $f \cdot g$) είναι περίπου:

$$f \cdot dg + g \cdot df,$$

άρα, ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού (με άλλα λόγια, η παράγωγος της $f \cdot g$) στο χρονικό διάστημα dt θα είναι ίσος με:

$$\frac{f \cdot dg + g \cdot df}{dt} = f \frac{dg}{dt} + g \frac{df}{dt},$$

οπότε, αν «διαβάσουμε» και πάλι τον συμβολισμό του Leibniz στην παραπάνω παράσταση, θα δούμε ότι θα πρέπει να ισχύει:

$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + g \cdot f'.$$

Το εντυπωσιακό με την όλη υπόθεση είναι ότι πράγματι, αυτός είναι ο κανόνας!

Πρόταση 7 (Παράγωγος γινομένου συναρτήσεων)

Αν $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις, $x_0 \in A$ είναι ένα εσωτερικό σημείο του A και οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε το γινόμενό τους είναι παραγωγίσιμο στο x_0 και μάλιστα ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0).$$

Απόδειξη

Αφού οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έπεται ότι τα ακόλουθα όρια υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Για την παράγωγο της $f + g$ στο x_0 , έχουμε:

$$(f + g)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0},$$

κι εδώ θα κάνουμε μια παύση για να επεξεργαστούμε λίγο την παραπάνω παράσταση. Ας πάρουμε ένα $x \neq x_0$. Αυτό που θέλουμε να δείξουμε απαιτεί να εμφανίσουμε στην παράσταση:

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0},$$

τις παραστάσεις:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ και } \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Δυστυχώς, στην παραπάνω παράσταση δεν μπορούμε να κάνουμε κάποια παραγοντοποίηση και να εμφανίσουμε έστω έναν από τους δύο παράγοντες στον αριθμητή, μπορούμε όμως να κάνουμε ένα αρκετά αγαπημένο τέχνασμα: να προσθαφαιρέσουμε έναν όρο που θα μας βοηθήσει να εμφανίσουμε τις παραστάσεις που θέλουμε. Μετά από λίγη σκέψη, βλέπουμε ότι ο βολικός αυτός όρος είναι ο¹³ $f(x)g(x_0)$. Επομένως, προσθαφαιρώντας τον έχουμε:

$$\begin{aligned} & \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x)(g(x) - g(x_0)) + g(x_0)(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} + \frac{g(x_0)(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} = \\ &= f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Εδώ, να παρατηρήσουμε ότι, αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε θα είναι και συνεχής σε αυτό, επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Με βάση όλα τα παραπάνω, έχουμε:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = \\ &= f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0), \end{aligned}$$

που ήταν το ζητούμενο.

¹³Η ο $f(x_0)g(x)$. Γενικά, θέλουμε έναν όρο που να έχει κάτι και από τον ένα όρο του αριθμητή και από τον άλλο έτσι ώστε να μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε.

2.5.5 Παράγωγος πηλίκου συναρτήσεων

Για την παράγωγο του πηλίκου δύο συναρτήσεων, όπως θα έχετε καταλάβει, δε θα ισχύει ότι:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

πράγμα που φαίνεται εύκολα, αν πάρει κανείς για $f(x) = x$ και για $g(x) = x^2$, οπότε:

$$f'(x) = 1 \text{ και } g'(x) = 2x,$$

και:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

Επομένως, αφ' ενός:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2x},$$

και, αφ' ετέρου:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Πώς θα βρούμε όμως κι εδώ τον κανόνα που θέλουμε; Ε, τώρα το μάθαμε το κόλπο, θα πει κανείς. Η αλήθεια είναι ότι θα χρησιμοποιήσουμε ένα παρόμοιο τέχνασμα για να βρούμε τον κανόνα, πριν τον αποδείξουμε, αλλά πρώτα θα κάνουμε μια άλλη κομβική παρατήρηση:

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}.$$

(Σιωπή)

Και τι μας λέει αυτή η παρατήρηση; Μας λέει ότι για να βρούμε τον κανόνα για το πηλίκο αρκεί να βρούμε έναν κανόνα που να μας λέει πώς να βρίσκουμε την παράγωγο της $\frac{1}{f}$, καθώς, τότε, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του γινομένου για να βρούμε την παράγωγο του πηλίκου ως εξής:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' + \frac{1}{g} \cdot f'.$$

Επομένως, αυτό που πρέπει να αναζητήσουμε είναι η παράγωγος της $\frac{1}{f}$, με $f(x) \neq 0$, για αρχή. Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, ότι το μέγεθος f μεταβάλλεται με τον χρόνο και ας θεωρήσουμε ένα μικρό χρονικό διάστημα dt . Τότε, σε αυτό το χρονικό διάστημα το f θα έχει μεταβληθεί κατά df , επομένως, το αντίστροφό του θα είναι τώρα πια το:

$$\frac{1}{f + df}.$$

Άρα, η μεταβολή της $\frac{1}{f}$ θα είναι η:

$$\frac{1}{f + df} - \frac{1}{f} = \frac{f - (f + df)}{f(f + df)} = \frac{-df}{f^2 + f \cdot df}.$$

Κι εδώ, μπορούμε, όπως και πριν να αγνοήσουμε το $f \cdot df$. Αλλά, για μια στιγμή, εδώ δεν έχουμε $df \cdot df$ ή κάτι παρόμοιο, αλλά έχουμε το df στην πρώτη και όχι σε κάποια υψηλότερη δύναμη. Πώς, λοιπόν, λέμε ότι το αγνοούμε; Η αλήθεια είναι ότι εδώ δε δουλεύει το ίδιο επιχείρημα, αλλά μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής: το $f \cdot df$ μπορεί να μην είναι αμελητέο από μόνο του, αλλά είναι σε σύγκριση με το f^2 , αφού στη μία περίπτωση πολλαπλασιάζουμε το f με τον εαυτό του και στην

άλλη το f έναν πολύ μικρό αριθμό¹⁴. Αν, εν πάσει περιπτώσει, αγνοήσουμε το $f \cdot df$, τότε παίρνουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της $\frac{1}{f}$ στο διάστημα dt θα είναι:

$$-\frac{df/f^2}{dt} = -\frac{df/dt}{f^2},$$

δηλαδή, «διαβάζοντας» με τα μάτια του Leibniz:

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

Ας το αποδείξουμε τώρα και αυστηρά αυτό.

Πρόταση 8

Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση και $x_0 \in A$ ένα εσωτερικό σημείο του A στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη και, επιπλέον, $f(x_0) \neq 0$, τότε¹⁵ η $\frac{1}{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και, μάλιστα:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}.$$

Απόδειξη

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , το παρακάτω όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Επίσης, αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , είναι και συνεχής σε αυτό και, ως εκ τούτου, υπάρχει και το παρακάτω όριο και είναι πραγματικός αριθμός:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ας πάρουμε τώρα ένα $x \neq x_0$, κοντά στο x_0 . Τότε:

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x) - \left(\frac{1}{f}\right)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = \\ &= \frac{\frac{f(x_0) - f(x)}{f(x)f(x_0)}}{x - x_0} = \\ &= -\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)f(x)f(x_0)} = \\ &= -\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \frac{1}{f(x)f(x_0)}. \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x) - \left(\frac{1}{f}\right)(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(-\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \frac{1}{f(x)f(x_0)} \right) = \end{aligned}$$

¹⁴Όπως καταλαβαίνετε, ο λόγος που ο Leibniz δεχόταν έντονη κριτική για τις μεθόδους του είναι αυτά τα «αμελητέα» και «αγνοούμε» χωρίς σοβαρή μαθηματική αιτιολόγηση. Αυτό όμως δεν αφαιρεί καθόλου από την αξία των συλλογισμών του και τα αποτελέσματα που μας έδωσε.

¹⁵Παρατηρήστε ότι, αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , θα είναι και συνεχής σε αυτό και, επομένως, αφού $f(x_0) \neq 0$, τότε η f θα είναι μη μηδενική κοντά στο x_0 , άρα μπορούμε να μιλάμε για το $\frac{1}{f(x)}$ και για x αρκετά κοντά στο x_0 .

$$\begin{aligned}
&= -f'(x_0) \frac{1}{f(x_0)f(x_0)} = \\
&= -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2},
\end{aligned}$$

που ήταν και το ζητούμενο.

Τώρα, μπορούμε σχετικά εύκολα να αποδείξουμε και τον κανόνα για την παράγωγο πηλίκου συναρτήσεων.

Πρόταση 9 (Παράγωγος πηλίκου συναρτήσεων)

Αν $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις, $x_0 \in A$ είναι ένα εσωτερικό σημείο του A και οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε το πηλίκό τους είναι παραγωγίσιμο στο x_0 και μάλιστα ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Απόδειξη

Αφού η g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, έπεται ότι και η $\frac{1}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και μάλιστα ισχύει ότι:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Από τον κανόνα παραγωγίσης γινομένου συναρτήσεων έχουμε:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= f(x_0) \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) + \frac{1}{g(x_0)} f'(x_0) = \\
&= -f(x_0) \frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2} + \frac{1}{g(x_0)} f'(x_0) = \\
&= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2},
\end{aligned}$$

που ήταν το ζητούμενο.

Πόρισμα 2 (Η παράγωγος της εφαπτομένης¹⁶)

Η παράγωγος της $f(x) = \varepsilon\varphi x$ σε όλο το πεδίο ορισμού της είναι ίση με:

$$f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι:

$$f(x) = \varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sin x},$$

οπότε, από τον κανόνα παραγωγίσης πηλίκου, έχουμε:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{\eta\mu x}{\sin x}\right)' = \\
&= \frac{(\eta\mu x)' \sin x - (\sin x)' \eta\mu x}{\sin^2 x} = \\
&= \frac{\sin x \cdot \sin x - (-\eta\mu x) \eta\mu x}{\sin^2 x} = \\
&= \frac{\sin^2 x + \eta\mu^2 x}{\sin^2 x} = \\
&= \frac{1}{\sin^2 x},
\end{aligned}$$

που ήταν το ζητούμενο.

¹⁶Σαν κακό αστείο ακούγεται να μιλάμε για την παράγωγο της εφαπτομένης, δηλαδή την κλίση της εφαπτομένης της εφαπτομένης, δηλαδή την εφαπτομένη της γωνίας της εφαπτομένης στην καμπύλη της εφαπτομένης, δηλαδή... Σταματάω.

2.5.6 Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Και φτάσαμε στο αποκορύφωμα! Εδώ, δεν έχουμε ούτε καν μια ιδέα για το πώς μπορεί να μοιάζει αυτό ο κανόνας! Λοιπόν, ας σκεφτούμε ψύχραιμα. Αρχικά, ας δούμε τι έχουμε και τι θέλουμε να βρούμε. Έχουμε δύο συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ που θέλουμε να ορίζεται η σύνθεσή τους, $g \circ f$, άρα $f(A) \cap B \neq \emptyset$ και θα έχουμε και ένα $x_0 \in A$ με το $f(x_0) \in B$ στο οποίο ψάχνουμε την παράγωγο της $g \circ f$. Η $g \circ f$, αλλιώς, υπενθυμίζουμε, γράφεται και:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Για να κάνουμε και τη δουλειά μας λίγο πιο εύκολη, για αρχή, ας υποθέσουμε ότι και οι δύο συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες σε όλο το πεδίο ορισμού τους.

Πριν ξεκινήσουμε να θεωρούμε πολύ μικρά χρονικά διαστήματα και να κάνουμε διάφορους συλλογισμούς, ας κάνουμε μια συζήτηση περί εξαρτημένων και ανεξάρτητων μεταβλητών στη συνάρτηση $(g \circ f)(x)$. Πόσες μεταβλητές εμφανίζονται μέσα σε αυτήν την παράσταση; Τρεις: οι x , f και g . Από αυτές ποιες είναι ανεξάρτητες και ποιες είναι εξαρτημένες και, επιπρόσθετα, αυτές που είναι εξαρτημένες, από ποιες εξαρτώνται; Εδώ θέλει λίγη σκέψη. Αρχικά, σίγουρα, η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η x , αφού μπορούμε να της δώσουμε αυθαίρετα τιμές από το πεδίο ορισμού της $g \circ f$. Από εκεί και πέρα, η f εξαρτάται σίγουρα από την x αφού στο σύμβολο $(g \circ f)(x)$, αν το γράψουμε ως

$$g(f(x)),$$

φαίνεται ξεκάθαρα ότι η f μεταβάλλει τις τιμές της καθώς η x παίρνει διάφορες τιμές. Αντίστοιχα, με το ίδιο επιχείρημα βλέπουμε ότι και η g είναι εξαρτημένη από την f . Κι εδώ έρχεται η κεντρική παρατήρηση: αφού η g εξαρτάται από την f που εξαρτάται από τη x , τότε, προφανώς και η g εξαρτάται από τη x . Άρα, πόσους διαφορετικούς ρυθμούς μεταβολής έχουμε; Ας βάλουμε τα πράγματα σε μία σειρά:

- Αν μεταβάλλουμε την τιμή της x τότε θα αλλάξει, προφανώς, η τιμή της f , αλλά, σαν επακόλουθο αυτού, και η τιμή της g . Επομένως, έχουμε δύο ρυθμούς μεταβολής ως προς x : τον ρυθμό μεταβολής της f ως προς x και τον ρυθμό μεταβολής της g μέσω της f ως προς x , δηλαδή της $g \circ f$ ως προς x .
- Αν όμως μεταβληθεί, με οποιονδήποτε τρόπο, η τιμή της f , τότε μεταβάλλεται και η τιμή της g , δεδομένου ότι η g εξαρτάται και από την f . Έτσι, έχουμε και έναν ακόμα ρυθμό μεταβολής, αυτή τη φορά ως προς f : τον ρυθμό μεταβολής της g ως προς f .

Για να κάνουμε τα πράγματα λίγο πιο σαφή, ας δούμε κι ένα παράδειγμα¹⁷.

Παράδειγμα 2 (Leibniz ανάβας)

Φανταστείτε ότι ο Leibniz, έχοντας πάρει την χρονομηχανή του κι έχοντας ταξιδέψει στο παρόν, αποφασίζει, μετά το πολιτισμικό σοκ που έχει πάθει με τα επιτεύγματα (;) του σύγχρονου κόσμου, να πάρει ένα αυτοκίνητο και να ανέβει σε ένα ψηλό βουνό, ας πούμε στα Τζουμέρκα¹⁸. Όμως, όπως και κάθε λογικός άνθρωπος, θα ήθελε να ξέρει τι ρούχα να πάρει μαζί του, δεδομένου ότι, όσο ανεβαίνει κανείς σε υψόμετρο, η θερμοκρασία πέφτει. Αυτό που απασχολεί τον Leibniz είναι να δει με τι ρυθμό αλλάζει η θερμοκρασία καθώς αυτός ανεβαίνει στο βουνό. Να σημειωθεί εδώ ότι ο δρόμος για τα Τζουμέρκα έχει αρκετές στροφές, πράγμα που κάνει την ανάβαση ιδιαίτερα αργή. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι το αμάξι του αλλάζει υψόμετρο με έναν ρυθμό της τάξης των 0.9km/h , δηλαδή, θα χρειαστεί περίπου δύο ώρες και τριάντα λεπτά για να ανέβει μέχρι την κορυφή του βουνού.

¹⁷Το παράδειγμα είναι εμπνευσμένο από ένα παράδειγμα που εξηγεί τον κανόνα της αλυσίδας στην αγγλική εκδοχή της Wikipedia. Όποιος θέλει να το βρει στην πρωτότυπη μορφή του, μπορεί να το βρει σε αυτόν τον σύνδεσμο: https://en.wikipedia.org/wiki/Chain_rule.

¹⁸Ιδιαίτερη πατρίδα και υψόμετρο 2.429 μέτρα.

Τα κλασσικά μοντέλα που περιγράφουν την αλλαγή της θερμοκρασίας σε έναν τόπο ανάλογα με το ύψος υπολογίζουν, περίπου, μια μεταβολή της τάξης των 6.5°C ανά χιλιόμετρο ανάβασης. Αυτό που θα ήθελε να βρει ο κύριος Leibniz είναι τον ρυθμό με τον οποίο αλλάζει η θερμοκρασία σαν συνάρτηση του χρόνου. Για να το βρει αυτό, ως γνήσιος μαθηματικός, σκέφτηκε τα παρακάτω. Ας ονομάσουμε $f(t)$ το ύψος του αυτοκινήτου σαν συνάρτηση του χρόνου. Τότε, αυτό που γνωρίζουμε είναι ότι:

$$f'(t) = 0.9\text{km/h}.$$

Ας ονομάσουμε και $g(h)$ τη θερμοκρασία σαν συνάρτηση του ύψους, οπότε αυτό που γνωρίζουμε είναι ότι:

$$g'(h) = -6.5^{\circ}\text{C/km}.$$

Πριν προχωρήσουμε, δώστε λίγη έμφαση στο πλην ($-$) στον παραπάνω τύπο, το οποίο ερμηνεύεται εύκολα φυσικά, αφού είπαμε ότι όσο αναβαίνουμε, η θερμοκρασία πέφτει.

Πάμε τώρα να δούμε τι ζητάει ο Leibniz. Θέλει να βρει τον ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας σαν συνάρτηση του χρόνου. Από τα παραπάνω, η θερμοκρασία, Θ , σαν συνάρτηση του χρόνου, θεωρώντας, προφανώς, ότι η θερμοκρασία δεν αλλάζει λόγω άλλων παραγόντων μέσα στις επόμενες τρεις ώρες, πέρα από τη μεταβολή του ύψους, μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$$\Theta(t) = g(f(t)) = (g \circ f)(t),$$

αφού, όπως είδαμε, η g μας δίνει τη θερμοκρασία σαν συνάρτηση του υψομέτρου και η f μας δίνει το υψόμετρο σαν συνάρτηση του χρόνου. Έτσι, ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι:

$$\Theta'(t) = (g \circ f)'(t).$$

Αν σκεφτούμε λίγο λογικά, μπορούμε να πούμε το εξής: αν εμείς ανεβαίνουμε με ρυθμό 0.9km/h και η θερμοκρασία αλλάζει με ρυθμό -6.5°C/km , τότε, ο ρυθμός με τον οποίο αλλάζει η θερμοκρασία ανά ώρα θα δίνεται από τη σχέση:

$$-6.5^{\circ}\text{C/km} \times 0.9\text{km/h} = -5.85^{\circ}\text{C/h}.$$

Πράγματι, αυτό έχει νόημα, μιας και ξέρουμε πόσο αλλάζει το ύψος ανά ώρα και, για αυτή τη μεταβολή του ύψους, ξέρουμε πόσο αλλάζει και η θερμοκρασία. Οι παραπάνω πράξεις, με τον συμβολισμό που είχαμε, δίνουν το:

$$\Theta'(t) = g'(f(t))f'(t),$$

αφού το ύψος στο οποίο βρισκόμαστε κάθε στιγμή δίνεται από τη συνάρτηση $f(t)$.

Το πρόβλημα με το παραπάνω παράδειγμα είναι ότι δεν είναι αρκετά γενικό, μιας και οι δύο συναρτήσεις που εμπλέκονται έχουν, αμφότερες, σταθερές παραγώγους. Έτσι, χρειαζόμαστε σίγουρα και ένα ισχυρότερο εργαλείο για να μπορούμε να πούμε με σιγουριά ότι ο τύπος που προέκυψε πράγματι από τα παραπάνω είναι ορθός¹⁹. Αυτό που ίσως να μπορούμε να κρατήσουμε από την παραπάνω διαδικασία και που σίγουρα θα σχολιάσουμε παρακάτω, είναι οι μονάδες των μεγεθών που μας υποδεικνύουν τον δρόμο. Σκεφτείτε λίγο τι φάχναμε, από θέμα μονάδων: μία απάντηση που να μετريέται σε $^{\circ}\text{C/h}$. Τι είχαμε ως δεδομένο; Δύο ρυθμούς, τον ένα μετρημένο σε km/h και τον άλλο σε $^{\circ}\text{C/km}$. Και τι κάναμε για να πάρουμε το αποτέλεσμα που θέλαμε; Απλοποίηση:

$$\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{km}} \cdot \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{h}}.$$

Αυτό το «σκεπτικό» θα το συναντήσουμε σε λίγο μπροστά μας.

¹⁹Άλλωστε, θα ήταν παράξενο να μπορούσαμε να αποδείξουμε ή έστω να επιχειρηματολογήσουμε για ένα τόσο περίπλοκο θεώρημα μόνο με απλή αριθμητική.

Ας προσπαθήσουμε, τώρα, να προσεγγίσουμε το θέμα λίγο πιο τυπικά. Ας πάρουμε, λοιπόν αυτές τις δύο συναρτήσεις, f, g όπως είπαμε παραπάνω και, ας υποθέσουμε ότι η f μεταβάλλεται σαν συνάρτηση του χρόνου και ότι η g εξαρτάται από την f . Ας πάρουμε τώρα ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα dt μέσα στο οποίο, όπως έχουμε δει να συμβαίνει χιλιάδες φορές, θα έχουμε και μια μικρή μεταβολή της f , ας την ονομάσουμε df . Αυτή η μικρή μεταβολή της f , με τη σειρά της, προκαλεί μια μικρή μεταβολή της g , ας την ονομάσουμε²⁰ dg . Αυτή η μεταβολή της g , όμως, είναι μια μεταβολή που είναι εκπεφρασμένη σε όρους της f . Επομένως, δεν έχουμε αυτό που θέλουμε, που είναι να δούμε πώς αλλάζει η σύνθεση $g \circ f$ σε όρους του t ή, με άλλα λόγια, τον ρυθμό μεταβολής της g ως προς τον χρόνο μέσω της f . Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε κάτι καινούργιο.

Είπαμε ότι η g είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της, δηλαδή, σε κάθε f που μπορούμε να της «δώσουμε». Ειδικότερα, η g είναι παραγωγίσιμη και στο f (την τιμή της f στην αρχή του χρονικού διαστήματος dt), επομένως, υπάρχει η εφαπτομένη της στο σημείο $(f, g(f))$. Η εξίσωση αυτής της εφαπτομένης θα είναι, όπως έχουμε δει, η:

$$y - g(f) = g'(f)(x - f) \Leftrightarrow y = g'(f)(x - f) + g(f).$$

Εδώ έρχεται η κεντρική μας ιδέα. Όπως είδαμε και στο σχήμα 1.13, η εφαπτομένη μιας συνάρτησης είναι η ευθεία που προσεγγίζει καλύτερα από όλες τις άλλες ευθείες που διέρχονται από αυτό το σημείο τη συνάρτηση, επομένως, μπορούμε να πούμε ότι, σε εκείνο το σημείο και εκεί κοντά, η συνάρτηση g είναι «περίπου ίση» με την εφαπτομένη της. Αυτό μεταφράζεται ως:

$$g(x) \approx g'(f)(x - f) + g(f),$$

για x κοντά στο f . Εφ' όσον εμάς μας απασχολεί να βρούμε τον ρυθμό μεταβολής της g ως συνάρτηση του t , θα μας ενδιέφερε να υπολογίσουμε και την μεταβολή της g στο χρονικό διάστημα dt το οποίο έχουμε επιλέξει. Επειδή το $f + df$ είναι κοντά στο f , δεδομένου ότι το df είναι αρκετά μικρό, μπορούμε να πούμε ότι:

$$g(f + df) \approx g'(f)(f + df - f) + g(f) = g'(f) \cdot df.$$

Επομένως, η μεταβολή της g που αντιστοιχεί στη μεταβολή df της f θα είναι:

$$g(f + df) - g(f) = g'(f)df.$$

Σκεφθείτε τώρα και το εξής: η μεταβολή df λαμβάνει χώρα στο χρονικό διάστημα dt , επομένως, η μεταβολή της g που υπολογίσαμε εμείς μόλις τώρα είναι η μεταβολή που αντιστοιχεί σε αυτό το χρονικό διάστημα. Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της g στο εν λόγω χρονικό διάστημα, dt , θα είναι:

$$\frac{g'(f)df}{dt} = g'(f) \frac{df}{dt},$$

οπότε, αν «διαβάσουμε» τον συμβολισμό του Leibniz, θα δούμε ότι παίρνουμε το εξής:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x),$$

που είναι και η σχέση που είχαμε «υποψιαστεί» ότι ισχύει στο προηγούμενο παράδειγμα.

Ας το δούμε τώρα και πιο τυπικά αυτό στο ακόλουθο θεώρημα το οποίο θα παραθέσουμε χωρίς απόδειξη, μιας και η απόδειξη είναι και περίπλοκη και ξεφεύγει λίγο από τα όρια της ύλης μας.

Θεώρημα 1 (Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης)

Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις και $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε $f(x_0) \in B$ και, επιπρόσθετα, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η g στο $f(x_0)$, τότε η συνάρτηση $g \circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και, μάλιστα, ισχύει:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

²⁰Παρατηρήστε πώς οι μεταβολές πηγαίνουν σαν «αλυσίδα».

Πολλές φορές, τη σχέση του παραπάνω θεωρήματος τη λέμε και «κανόνα της αλυσίδας²¹» κυρίως λόγω της μορφής που παίρνει ο κανόνας με τον συμβολισμό του Leibniz:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{df} \frac{df}{dx},$$

όπου $z = g(f)$.

Το παραπάνω θεώρημα μας δίνει το ακόλουθο κεντρικό αποτέλεσμα:

Πρόταση 10 (Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης)

Αν $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία 1-1 και παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε και η αντίστροφή της είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Απόδειξη

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε το παρακάτω όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Για την παράγωγο της αντίστροφης έχουμε:

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} \stackrel{x=f(y)}{=} \lim_{y \rightarrow f^{-1}(x_0)} \frac{y - f^{-1}(x_0)}{f(y) - x_0} \\ &= \lim_{y \rightarrow f^{-1}(x_0)} \frac{1}{\frac{f(y) - f(f^{-1}(x_0))}{y - f^{-1}(x_0)}} = \\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}, \end{aligned}$$

άρα η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και, μάλιστα, ισχύει ότι²²:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Μπορείτε να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τη σχέση της παραπάνω πρότασης;

Παρατήρηση 1

Αν γνωρίζαμε ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη εξ αρχής, θα μπορούσαμε να πάρουμε τη σχέση της παραπάνω πρότασης άμεσα, χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας και παραγωγίζοντας κατά μέλη τη σχέση:

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Πριν κλείσουμε αυτήν την ενότητα, θα αποδείξουμε ότι και η τελευταία από τις βασικές μας συναρτήσεις, ο λογάριθμός είναι παραγωγίσιμη και θα δώσουμε κι έναν τύπο για την παράγωγο όλων των εκθετικών συναρτήσεων πέρα από την e^x , καθώς επίσης κι έναν τύπο για την παράγωγο της x^a , για $a \neq 0$ και $a \neq 1$.

²¹I see what you did there...

²²Στον παραπάνω υπολογισμό, κάναμε μια αλλαγή μεταβλητής. Όσοι έχετε μνήμη ελέφαντα θα θυμάστε ότι, για να κάνουμε αλλαγή μεταβλητής, πρέπει να έχουμε εξασφαλίσει ότι η συνάρτηση με την οποία αντικαθιστούμε τη μεταβλητή μας (εδώ είναι η f^{-1}) δεν παίρνει την τιμή $f^{-1}(x_0)$ κοντά στο x_0 . Πώς το έχουμε εξασφαλίσει αυτό; Αφού η f είναι αντιστρέψιμη, είναι, εξ ορισμού, 1-1, επομένως, και η αντίστροφή της, f^{-1} , είναι 1-1, άρα παίρνει κάθε τιμή στο σύνολο τιμών της ακριβώς μία φορά.

Πόρισμα 3 (Παράγωγος του λογαρίθμου)

Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της και μάλιστα:

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Απόδειξη

Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι παραγωγίσιμη ως η αντίστροφη συνάρτηση της e^x και, από την προηγούμενη πρόταση, η παράγωγός της δίνεται από τη σχέση:

$$f'(x) = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x},$$

που ήταν το ζητούμενο.

Πόρισμα 4 (Παράγωγος εκθετικών συναρτήσεων)

Η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$ είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα:

$$f'(x) = a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι:

$$f(x) = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a},$$

επομένως, από τον κανόνα της αλυσίδας, έπεται ότι:

$$f'(x) = e^{x \ln a} (x \ln a)' = x^a \ln a,$$

που ήταν το ζητούμενο.

Πόρισμα 5 (Παράγωγος της x^a)

Η συνάρτηση²³ $f(x) = x^a$, με $a \neq 0$ και $a \neq 1$ είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα:

$$f'(x) = ax^{a-1}, \quad x > 0.$$

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι:

$$f(x) = x^a = e^{\ln x^a} = e^{a \ln x},$$

επομένως, από τον κανόνα της αλυσίδας, έπεται ότι:

$$f'(x) = e^{a \ln x} (a \ln x)' = x^a a \frac{1}{x} = ax^{a-1},$$

που ήταν το ζητούμενο.

Συνοψίζουμε τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας στους πίνακες 2.1 και 2.2.

²³Θυμηθείτε ότι δυνάμεις με πραγματικό εκθέτη ορίζουμε μόνο για τους θετικούς αριθμούς και υπό συγκεκριμένες συνθήκες και για το 0, επομένως δεν είναι περιοριστικό το γεγονός ότι σε αυτό το πόρισμα παίρνουμε αποτέλεσμα μόνο για $x > 0$.

$(c)' = 0$	$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$
$(x)' = 1$	$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$
$(x^a)' = ax^{a-1}, a \neq 0, 1$	$(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(a^x)' = a^x \ln a, 0 < a \neq 1$
$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Πίνακας 2.1: Οι παράγωγοι των βασικών συναρτήσεων.

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x), \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

Πίνακας 2.2: Οι κανόνες παραγωγισής.

Κεφάλαιο 3

Βασικά θεωρήματα που αφορούν τις παραγώγους συναρτήσεων

3.1 Το θεώρημα του Fermat

Ωραία όλα αυτά, αλλά, ως τώρα, οι μόνες εφαρμογές των παραγώγων που είδαμε έχουν να κάνουν με το πώς να βρίσκουμε την εφαπτομένη μιας καμπύλης σε ένα σημείο της και το πώς να υπολογίζουμε την ταχύτητα, την επιτάχυνση ή, γενικότερα, τον ρυθμό μεταβολής ενός μεγέθους. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το ακόλουθο, απλό, πρόβλημα.

«Μία βιομηχανία επεξεργασίας λημμάτων παράγει ρύπους διοξειδίου του άνθρακα που εξαρτώνται από την ποσότητα των λημμάτων που επεξεργάζεται η μονάδα με βάση τη συνάρτηση:

$$r(x) = \frac{x^3}{x+1} e^{-x}, \quad 0 \leq x \leq 2,$$

όπου το x υποδηλώνει δεκάδες τόνους λημμάτων και το r μετρά τους ρύπους που εκπέμπονται σε δεκάδες τόνους. Η βιομηχανία αποφασίζει, στα πλαίσια των νέων διατάξεων για την προστασία του περιβάλλοντος, να βρει την ποσότητα λημμάτων που πρέπει να επεξεργάζονται κάθε μέρα έτσι ώστε να έχουν την μεγαλύτερη δυνατή απόδοση ρύπων/επεξεργασμένων λημμάτων. Με λίγα λόγια, αυτό που απαιτείται από τη βιομηχανία είναι να βρει την ποσότητα λημμάτων που πρέπει να επεξεργάζεται ημερησίως έτσι ώστε το περιβαλλοντικό κόστος ανά μονάδα επεξεργασμένων λημμάτων να μην αυξάνεται, δηλαδή, όσο περισσότερα λήμματα επεξεργάζεται, τόσο πιο λίγοι να είναι οι ρύποι ανά μονάδα λημμάτων¹. Επομένως, αυτό σημαίνει ότι πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε το πηλίκο:

$$K = \frac{\text{ρύποι}}{\text{λήμματα}},$$

που, με τα σύμβολα που έχουμε, θα είναι η συνάρτηση:

$$K(x) = \frac{r(x)}{x}.$$

¹ Προφανώς, οι ρύποι θα αυξάνονται όσο η βιομηχανία επεξεργάζεται κι άλλα λήμματα, αλλά ο στόχος είναι να φτάσει σε ένα σημείο που τα λήμματα που θα επεξεργάζεται να έρχονται πιο «φθηνά», σε θέμα ρύπων. Έτσι, δεν ψάχνουμε να ελαχιστοποιήσουμε τους ρύπους, καθώς τότε η λύση θα ήταν απλή: δε θα έπρεπε να επεξεργαζόμαστε τίποτα. Αντιθέτως, ψάχνουμε να βρούμε ένα σημείο στο οποίο το περιβαλλοντικό κόστος θα είναι το ελάχιστο δυνατό και, ιδανικά, η ποσότητα επεξεργαζόμενων λημμάτων θα είναι αρκετά μεγάλη, άρα η επεξεργασία ενός τόνου λημμάτων θα στοιχίζει λιγότερο στο περιβάλλον σε εκείνο το σημείο από ότι σε όλα τα άλλα.

Αυτό που πρέπει να κάνουμε, επομένως, είναι να αναζητήσουμε ένα ελάχιστο της K . Πριν από το μέγιστο, η f θα είναι (γνησίως) αύξουσα και, μετά από αυτό, (γνησίως) φθίνουσα. Αλλά αυτά όλα δεν είναι ακόμα αυστηρά διατυπωμένα και, σε τελική ανάλυση, ποιος μας είπε ότι αυτή η συνάρτηση έχει (ολικά) ακρότατα; Μπορεί να μην έχει ούτε ένα ακρότατο στο πεδίο ορισμού της, θα έλεγε κανείς.

Ας σκεφτούμε λίγο πιο ψύχραιμα. Ο τύπος της K είναι:

$$K(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{-x}, \quad 0 \leq x \leq 2,$$

επομένως, αφ' ενός, η K είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, αφ' ετέρου, είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα², το $[0, 2]$, επομένως, από το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής γνωρίζουμε ότι υπάρχουν δύο αριθμοί $x_1, x_2 \in [0, 2]$, τέτοιοι ώστε:

$$K(x_1) \leq K(x) \leq K(x_2), \quad \forall x \in [0, 2].$$

Μόνο που, πέρα από το ότι υπάρχουν οι εν λόγω αριθμοί, το παραπάνω θεώρημα δε μας λέει και τίποτα άλλο. Δε μας λέει, ας πούμε, ποιοι είναι αυτοί οι αριθμοί, πράγμα που μας απασχολεί στην περίπτωση μας. Πώς λοιπόν θα μπορούσαμε να βρούμε και ποια είναι τα x_1, x_2 στα οποία η K παρουσιάζει τα ολικά ακρότατά της; Πριν δούμε αυτό, ας θυμηθούμε δύο ορισμούς που είχαμε δώσει και στο πρώτο κεφάλαιο, σε σχέση με τα τοπικά ακρότατα:

Ορισμός 7 (Τοπικό ελάχιστο)

Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ τότε λέμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ το $f(x_0)$ αν υπάρχει ένα $\delta > 0$, έτσι ώστε:

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A.$$

Ορισμός 8 (Τοπικό μέγιστο)

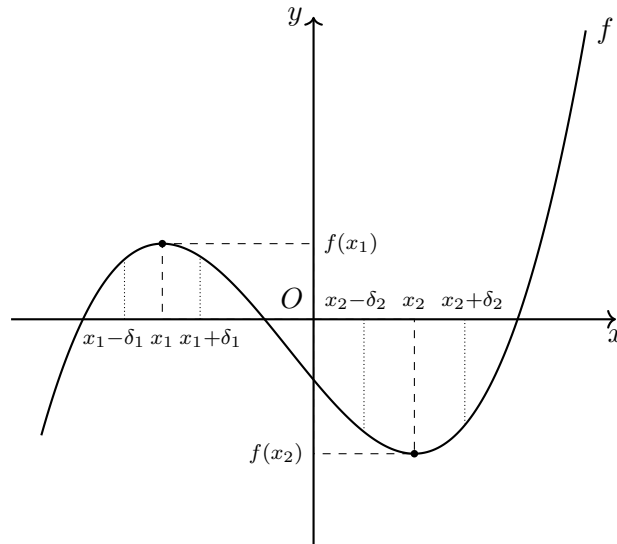
Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ τότε λέμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ το $f(x_0)$ αν υπάρχει ένα $\delta > 0$, έτσι ώστε:

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A.$$

Η ουσιαστική διαφορά των δύο παραπάνω ορισμών σε αντίθεση με αυτούς των ολικών ακροτάτων είναι αυτό το $\delta > 0$ και το διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ που εμφανίζεται μέσα στον ορισμό. Αυτό, πρακτικά, υποδηλώνει την έννοια της «τοπικότητας», δηλαδή, αντί να απαιτούμε να ισχύει η ανισότητα $f(x) \leq f(x_0)$ (ή, αντίστοιχα, $f(x) \geq f(x_0)$) σε όλο το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, απαιτούμε αυτή να ισχύει «γύρω από το x_0 », δηλαδή, όπως λέμε, «κοντά στο x_0 », πράγμα που κάνει το ακρότατο «τοπικό» και όχι «ολικό». Αυτό μπορεί να φανεί καλύτερα στο σχήμα 3.1.

Ας επιστρέψουμε τώρα στο πρόβλημά μας. Πώς μπορούμε να βρούμε τα ακρότατα, τοπικά και ολικά, της $K(x)$; Η αλήθεια είναι ότι, ως τώρα, οι μόνη μέθοδος που έχουμε δει, είναι να ξεκινάμε από κάποια γνωστή ανισότητα και να προσπαθούμε να καταλήξουμε σε κάποια ανισότητα της μορφής $f(x) \leq f(x_0)$ ή $f(x) \geq f(x_0)$ ή, εναλλακτικά, σε κάποιες περιπτώσεις, να χρησιμοποιούμε και την μονοτονία της f για να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα. Εδώ, όμως, ο τύπος της K μοιάζει αρκετά περίπλοκος έτσι ώστε να υπάρχει κάποιος προφανής τρόπος να τον επεξεργαστούμε και να καταλήξουμε σε κάποιο χρήσιμο συμπέρασμα. Σε αυτήν την κατεύθυνση έρχεται να μας βοηθήσει λίγο ένα θεώρημα ενός κυρίου που συναντήσαμε και προηγουμένως, του Fermat, το οποίο μπορεί να μη μας δίνει, ακόμα, κάποια γενική μέθοδο για να βρίσκουμε απευθείας τα ακρότατα μιας συνάρτησης, αλλά μας δίνει έναν πολύ καλό «μπούσουλα», που μπορούμε να ακολουθούμε έτσι ώστε να αναζητούμε τα ακρότατα αυτά.

² Προφανώς, η K μπορεί να οριστεί για κάθε $x \neq -1$, όπως υποδεικνύει ο τύπος της, αλλά οι περιορισμοί το x να μην είναι αρνητικό και να μην είναι μεγαλύτερο του 2 είναι και οι δύο λογικοί, μιας και δεν έχει νόημα να επεξεργάζεται αρνητική ποσότητα λημμάτων και, ως βιομηχανία, έχει και κάποια όρια στις δυνατότητες επεξεργασίας της, προφανώς, τα οποία, στη συγκεκριμένη περίπτωση, είναι οι 20 τόνοι (το x μετράει δεκάδες τόνους).



Σχήμα 3.1: Τοπικά ακρότατα.

Η ιδέα του θεωρήματος είναι η εξής: αν μία συνάρτηση έχει ακρότατο σε ένα σημείο, ας πούμε ένα τοπικό ελάχιστο, και είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό, τότε, λίγο πριν φτάσει σε αυτό (αριστερά), θα «πέφτει», θα είναι, με άλλα λόγια «περίπου φθίνουσα» και, λίγο αφότου το περάσει (δεξιά), θα «ανεβαίνει», με άλλα λόγια, θα είναι «περίπου αύξουσα». Όμως, τι σημαίνει ότι είναι «περίπου φθίνουσα» και μάλιστα «λίγο πριν φτάσει»; Σημαίνει ότι αν πάρουμε έναν αριθμό x λίγο πριν το x_0 , δηλαδή $x < x_0$, και σχεδιάσουμε την τέμνουσα, τότε αυτή αναμένουμε να έχει αρνητική ή μηδενική κλίση, άρα $f(x) \geq f(x_0)$ και η κλίση της τέμνουσας θα είναι:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

ως πηλίκο ετερόσημων αριθμών. Με το ίδιο σκεπτικό, αν πάμε και λίγο δεξιά, η τέμνουσα θα έχει κλίση θετική ή μηδέν, οπότε θα ισχύει ότι:

$$x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0),$$

οπότε:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

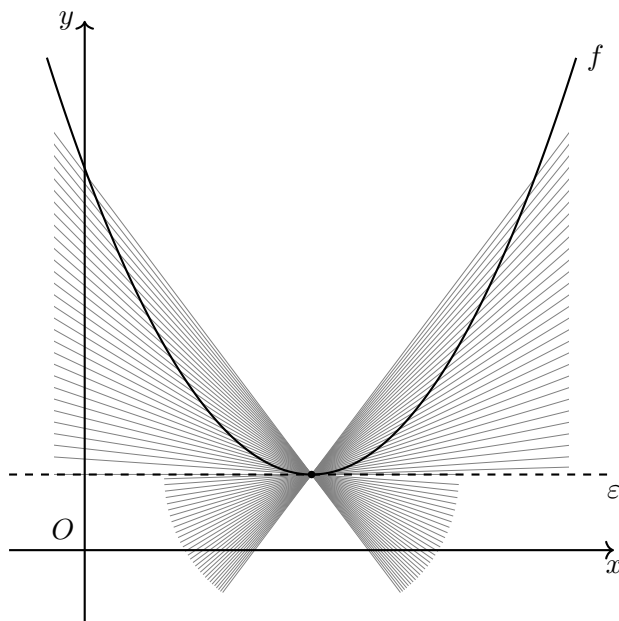
ως πηλίκο ομόσημων αριθμών.

Όλα τα παραπάνω ισχύουν για κάθε x κοντά στο x_0 , επομένως, για όλες τις τέμνουσες που διέρχονται από το $(x_0, f(x_0))$ και από ένα άλλο σημείο της γραφικής παράστασης της f κοντά στο x_0 θα ισχύουν τα παραπάνω, πράγμα που φαίνεται και στο σχήμα 3.2.

Όπως βλέπουμε και στο σχήμα 3.2, οι τέμνουσες, δεδομένου ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , θα «τείνουν» προς την εφαπτομένη και, αφού οι τέμνουσες που έρχονται από αριστερά έχουν κλίσεις αρνητικές (ή μηδέν) και αυτές που έρχονται από δεξιά έχουν κλίσεις θετικές (ή μηδέν), θα πρέπει, για να υπάρχει η εφαπτομένη στο $(x_0, f(x_0))$, να προσεγγίζουν μία ευθεία με κλίση ακριβώς 0 (η ευθεία (ε) , του σχήματος 3.2). Επομένως, επειδή η κλίση της εφαπτομένης είναι ακριβώς η παράγωγος της f σε εκείνο το σημείο, θα πάρουμε $f'(x_0) = 0$.

Όλα τα παραπάνω τα συμμαζεύουμε στο ακόλουθο θεώρημα, του οποίου η απόδειξη είναι πιστή «μεταγραφή» των παραπάνω σκέψεων στα μαθηματικένια³.

³Εδώ πρέπει να σημειώσουμε, για λόγους ιστορικής ακρίβειας, ότι δεν ήταν αυτός ο τρόπος ακριβώς με τον οποίο



Σχήμα 3.2: Η «απόδειξη» του θεωρήματος του Fermat.

Θεώρημα 2 (Fermat)

Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση και $x_0 \in A$ είναι ένα εσωτερικό σημείο του A στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη και στο οποίο η f παρουσιάζει ένα (τοπικό ή ολικό) ακρότατο, τότε:

$$f'(x_0) = 0.$$

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας⁴, ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο⁵. Αφού το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του A , θα υπάρξει ένα $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε:

$$(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \subseteq A,$$

δηλαδή, εκτός από το x_0 , έχουμε εξασφαλίσει ότι και μια «γειτονία» του είναι επίσης μέσα στο A . Τώρα, αφού η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο, υπάρχει ένας αριθμός $\delta_2 > 0$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0), \forall x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2) \cap A.$$

Αν πάρουμε τον μικρότερο από τους δύο αριθμούς δ_1 και δ_2 και, χάριν ευκολίας, τον ονομάσουμε και δ , τότε, θα έχουμε το εξής:

$$f(x) \leq f(x_0), \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

ο Fermat προσέγγιζε το ζήτημα. Ο Fermat είχε έναν τρόπο σκέψης πιο κοντά στο ακόλουθο επιχείρημα: αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 , θα πρέπει, εκεί κοντά, να «επιβραδύνει» τον ρυθμό της, επομένως, ακριβώς τη στιγμή που φτάνουμε στο ακρότατο, θα πρέπει, στιγμιαία, να σταματάει και ο ρυθμός μεταβολής της (η παράγωγός της, με άλλα λόγια) να μηδενίζεται εκεί. Σε όλα αυτά, ο Fermat χρησιμοποιεί «ψευδο-ισότητες» και διαγράφει όρους με το σκεπτικό που είδαμε και στις άλλες μεθόδους και δεν αναφέρει τίποτα για όρια ή παραγώγους, αλλά η κεντρική ιδέα παραμένει η ίδια. Αυτό το επιχείρημα, μπορεί, βέβαια, να υποστηριχθεί και γεωμετρικά με την παραπάνω κατασκευή, απλώς, ο Fermat δε φαίνεται να την είχε κάνει, τουλάχιστον όχι σε κάποιο από τα χειρόγραφα του που έχουν διασωθεί ως τις μέρες μας.

⁴Πέρα από την μανία καταδίωξης που έχει αυτή η γεικότητα και νομίζει ότι όλοι πάνε να τη βλάψουν, την άλλη περίπτωση — να παρουσιάζει η f ελάχιστο στο x_0 — την εξετάσαμε στην παραπάνω συζήτηση, οπότε έχουμε και το κεφάλι μας ήσυχο χωρίς να παθαίνει κάτι η γενικότητα.

⁵Ούτως ή άλλως, τελείως καταχρηστικά, ένα ολικό μέγιστο είναι πάντα και τοπικό, άρα στην περίπτωση του τοπικού μεγίστου είναι το «ζουμί».

Αυτό ισχύει διότι, αφού ο δ είναι ο μικρότερος από τους δ_1, δ_2 , τότε θα ισχύουν και οι δύο ιδιότητες που θέλουμε, δηλαδή και:

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq A,$$

και:

$$f(x) \leq f(x_0), \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A,$$

οπότε, αφού το $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ είναι υποσύνολο του A , έχουμε⁶:

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A = (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Τώρα, αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , υπάρχει η παράγωγός της και, μάλιστα:

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Ας πάρουμε τώρα, ξεχωριστά, τις δύο πλευρικές παραγώγους:

- Αφού η $f'_+(x_0)$ υπάρχει, τότε το παρακάτω όριο θα υπάρχει και θα είναι πραγματικός αριθμός:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Αφού $x \rightarrow x_0^+$, έπεται ότι

$$x > x_0 \Leftrightarrow x - x_0 > 0.$$

Επίσης έχουμε και:

$$f(x) \leq f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \leq 0,$$

κοντά στο x_0 , επομένως, έπεται ότι:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Παίρνοντας όρια καθώς $x \rightarrow x_0^+$, έπεται ότι:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Αφού $f'(x_0) = f'_+(x_0)$, έπεται ότι:

$$f'(x_0) \leq 0.$$

- Ανάλογα, αφού η $f'_-(x_0)$ υπάρχει, τότε το παρακάτω όριο θα υπάρχει και θα είναι πραγματικός αριθμός:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Αφού $x \rightarrow x_0^-$, έπεται ότι

$$x < x_0 \Leftrightarrow x - x_0 < 0.$$

Επίσης έχουμε και:

$$f(x) \leq f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \leq 0,$$

⁶Όλη αυτήν την ιστορία με το δ μπορείτε να τη σκεφτείτε ως εξής: αν ξέρετε ότι μπορείτε να μυρίσετε την κάπνα από ένα τζάκι αν είστε σε ακτίνα 2 μέτρων και ότι μπορείτε να νιώσετε τη «ζέστη» που εκπέμπει αν είστε σε ακτίνα ενός μέτρου τότε, αν εσείς στέκεστε σε απόσταση μισού μέτρου από το τζάκι θα νιώθετε και ζεστά και θα μυρίζετε την κάπνα. Ε, στην περίπτωσή μας το x_0 είναι το τζάκι και τα δ_1, δ_2 είναι οι αποστάσεις στις οποίες «μυρίζετε» και «νιώθετε» το τζάκι (ή και αντίστροφα).

κοντά στο x_0 , επομένως, έπεται ότι:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Παίρνοντας όρια καθώς $x \rightarrow x_0^-$, έπεται ότι:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Αφού $f'(x_0) = f'_-(x_0)$, έπεται ότι:

$$f'(x_0) \geq 0.$$

Τώρα, από τα δύο παραπάνω έπεται ότι:

$$0 \leq f'(x_0) \leq 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0,$$

που ήταν και το ζητούμενο.

Παρατήρηση 2

Η απαίτηση το x_0 να είναι στο εσωτερικό του A είναι *απαραίτητη*, αφού αν δεν είναι τότε η παράγωγος εκεί ενδέχεται να μην είναι μηδέν. Πράγματι, αν πάρουμε τη συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x^2,$$

τότε, αυτή παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο στο 1 (θυμηθείτε τη γραφική της παράσταση). Όμως, εύκολα βλέπουμε ότι:

$$f'(x) = 2x,$$

οπότε:

$$f'(1) = 2 \neq 0,$$

άρα χρειάζεται το σημείο που παρουσιάζεται το ακρότατο να είναι εσωτερικό.

Τι μας λέει τώρα αυτό το θεώρημα για την αναζήτηση (τοπικών) ακροτάτων; Μας λέει ότι, αν έχουμε ένα ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης και η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη εκεί τότε πρέπει η παράγωγός της να είναι ίση με το μηδέν σε αυτό το σημείο. Αν όμως δεν ισχύει κάποια από τις υποθέσεις μας, δηλαδή αν το x_0 δεν είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού ή αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη εκεί; Τότε, δεν ξέρουμε τι γίνεται και πρέπει να ασχοληθούμε ξεχωριστά με αυτά. Αυτό που επί της ουσίας μας δίνει το παραπάνω θεώρημα είναι μία *αναγκαία συνθήκη*⁷, για να παρουσιάζει μία συνάρτηση ακρότατο σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της: (α') ή θα είναι ένα εσωτερικό σημείο που θα υπάρχει η παράγωγος και θα είναι ίση με 0 (β') ή θα είναι ένα σημείο που δεν είναι εσωτερικό (γ') ή δεν θα υπάρχει η παράγωγος εκεί. Πράγματι, αν ένα σημείο δεν ικανοποιεί καμία από τις τρεις παραπάνω υποθέσεις τότε δε γίνεται να παρουσιάζει ακρότατο, αφού, αν παρουσίαζε ακρότατο εκεί:

- εφ' όσον δεν ικανοποιεί την τρίτη υπόθεση, η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη εκεί,
- εφ' όσον δεν ικανοποιεί τη δεύτερη υπόθεση, το σημείο είναι εσωτερικό και,

⁷Μία συνθήκη λέγεται *αναγκαία* αν δε γίνεται να έχουμε ένα συμπέρασμα χωρίς να ισχύει αυτή η συνθήκη. Για παράδειγμα, η συνθήκη «έχω λεφτά» είναι αναγκαία για να ικανοποιηθεί το συμπέρασμα «αγοράζω ραπανάκια». Επίσης, μία συνθήκη λέγεται *ικανή* αν όποτε ισχύει αυτή η συνθήκη έχουμε, άμεσα, και το συμπέρασμα. Για παράδειγμα, η συνθήκη «έχω αφήσει ένα τοστ σε αναμένο φούρνο στους $240^\circ C$ για δύο ώρες» είναι ικανή συνθήκη για το συμπέρασμα «το τοστ καήκε». Προσέξτε ότι μία συνθήκη που είναι ικανή δεν είναι και αναγκαία και, αντιστρόφως, μία συνθήκη που είναι αναγκαία, δεν είναι ικανή. Δηλαδή, για να παίξουμε λίγο με τις λέξεις (και να μπλεχτούμε) το να είναι μία συνθήκη αναγκαία δεν είναι ικανή (ούτε αναγκαία) συνθήκη για να είναι η ίδια συνθήκη ικανή και, αντιστρόφως, το να είναι μία συνθήκη ικανή, δεν είναι αναγκαία (ούτε ικανή) συνθήκη για να είναι η ίδια συνθήκη αναγκαία.

- εφ' όσον παρουσιάζει και ακρότατο εκεί, από το θεώρημα του Fermat, θα έπρεπε η παράγωγος εκεί να είναι 0, άτοπο, γιατί υποθέσαμε ότι η παράγωγος εκεί δεν είναι 0 (πρώτη υπόθεση).

Συνοψίζουμε τα παραπάνω στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 9 (Κρίσιμο σημείο)

Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση και $x_0 \in A$ τότε το x_0 θα λέγεται *κρίσιμο σημείο* της f αν ικανοποιείται τουλάχιστον μία από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

1. το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του A και η f είναι παραγωγίσιμη σε αυτό με $f'(x_0) = 0$,
2. το x_0 δεν είναι εσωτερικό σημείο του A ,
3. η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Αυτό, λοιπόν, που προκύπτει από την παραπάνω συζήτηση είναι ότι:

«Το να είναι το x_0 κρίσιμο σημείο μιας συνάρτησης είναι *αναγκαία* συνθήκη έτσι ώστε αυτή να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 . Με άλλα λόγια, αν μία συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της».

Άρα, για να αναζητήσουμε τα τοπικά ακρότατα μίας συνάρτησης, δεδομένης της παραπάνω αναγκαίας συνθήκης, μπορούμε πρώτα να βρούμε όλα τα κρίσιμα σημεία της και, στη συνέχεια, να εξετάσουμε ποια από αυτά είναι πράγματι ακρότατα της συνάρτησης με όποιον τρόπο μπορούμε. Αυτή η διαδικασία είμαστε σίγουροι ότι είναι θα μας δώσει ακριβώς τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης μιας και όλα τους είναι και κρίσιμα σημεία της.

Ας πάρουμε τώρα τη συνάρτηση

$$K(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{-x}, \quad x \in [0, 2],$$

που είδαμε στο πρόβλημα στην αρχή της ενότητας, και ας βρούμε τα τοπικά της ακρότατα. Για να το κάνουμε αυτό πρέπει, όπως είπαμε, να βρούμε πρώτα τα κρίσιμα σημεία της. Εφ' όσον η

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{-x}, \quad x \neq -1,$$

είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \neq -1$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, θα είναι και στο $[0, 2]$, άρα δεν έχουμε να ψάξουμε για κρίσιμα σημεία στα οποία η K δεν είναι παραγωγίσιμη. Έχουμε όμως δύο σημεία, τα $x_1 = 0$ και $x_2 = 2$, τα οποία είναι κρίσιμα σημεία αφού δεν είναι εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της K . Ας βρούμε τώρα και τις ρίζες της παραγώγου της K στο $(0, 2)$.

$$\begin{aligned} K'(x) &= \left(\frac{x^2}{x+1} e^{-x} \right)' = \left(\frac{x^2}{x+1} \right)' e^{-x} + \frac{x^2}{x+1} (e^{-x})' = \\ &= \frac{(x^2)'(x+1) - x^2(x+1)'}{(x+1)^2} e^{-x} + \frac{x^2}{x+1} e^{-x} (-x)' = \\ &= \frac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} e^{-x} + \frac{x^2}{x+1} e^{-x} \cdot (-1) = \\ &= \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} e^{-x} - \frac{x^2}{x+1} e^{-x} = \\ &= \left(\frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} - \frac{x^2}{x+1} \right) e^{-x} = \\ &= \frac{x^2 + 2x - (x+1)x^2}{(x+1)^2} e^{-x} = \\ &= \frac{-x^3 + 2x}{(x+1)^2} e^{-x} = \end{aligned}$$

$$= \frac{-x(x^2 - 2)}{(x + 1)^2} e^{-x}.$$

Τώρα, επιλύουμε την εξίσωση:

$$\begin{aligned} K'(x) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{-x(x^2 - 2)}{(x + 1)^2} e^{-x} &= 0 \xleftrightarrow{x \in (0,2) \Rightarrow x \neq -1} \\ \Leftrightarrow -x(x^2 - 2) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -x = 0 \text{ ή } x^2 - 2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \sqrt{2} \text{ ή } x &= -\sqrt{2}, \end{aligned}$$

όπου, αφού $x \in (0, 2)$, οι ρίζες $x = 0$ και $x = -\sqrt{2}$ απορρίπτονται, άρα η μόνη λύση της εξίσωσης που μας ενδιαφέρει είναι η $x_3 = \sqrt{2}$, που είναι και το τρίτο και τελευταίο κρίσιμο σημείο μας.

Επομένως, τα τρία κρίσιμα σημεία της K είναι τα:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = \sqrt{2}.$$

Ανάμεσα σε αυτά βρίσκονται όλα τα ακρότατα της K . Υπολογίζουμε, επομένως τις τιμές τις f εκεί:

$$K(x_1) = K(0) = 0, \quad K(x_2) = K(2) = \frac{4}{3e^2}, \quad K(x_3) = K(\sqrt{2}) = \frac{2}{(1 + \sqrt{2})e^{\sqrt{2}}}.$$

Από τις τρεις παραπάνω τιμές, το $K(0) = 0$ είναι εμφανώς η μικρότερη, άρα είναι το ολικό ελάχιστο της f . Μένει να δούμε ποια από τις άλλες δύο τιμές της K είναι μεγαλύτερη για να βρούμε και το ολικό μέγιστό της. Κοιτάμα λίγο τις τιμές και κοντοστεκόμαστε. Η μία είναι η:

$$K(x_2) = \frac{4}{3e^2},$$

και η άλλη είναι η:

$$K(x_3) = \frac{2}{(1 + \sqrt{2})e^{\sqrt{2}}}.$$

Πώς θα τις συγκρίνουμε αυτές; Δεδομένου ότι δε ζούμε στον Μεσαίωνα, θα πάρουμε έναν υπολογιστή τσέπης και θα βρούμε:

$$K(x_2) \approx 0.18 \text{ και } K(x_3) \approx 0.2,$$

επομένως, η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_3 = \sqrt{2}$, το $K(x_3)$.

Για το $x_2 = 2$ δεν μπορούμε να επιχειρηματολογήσουμε σύντομα αν αυτό είναι τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο ή αν δεν είναι ακρότατο της K , επομένως, προς το παρόν, το αφήνουμε στην άκρη.

Όπως, ίσως, θα καταλάβετε, το μεγαλύτερο μειονέκτημα της μεθόδου των κρίσιμων σημείων είναι ότι, ως αναγκαία συνθήκη, δε μας δίνει απάντηση στο πρόβλημα απευθείας, απλά μας λέει ποια είναι τα «υποψήφια» ακρότατα, τα οποία πρέπει μετά να ελέγξουμε εμείς, ένα προς ένα. Αυτό, ειδικά αν η συνάρτησή μας έχει πολλά κρίσιμα σημεία, είναι αρκετά απαιτητική διαδικασία, πολλές φορές ακόμα και για έναν υπολογιστή. Θα θέλαμε, επομένως, να βρούμε και κάποιες ικανές συνθήκες σε σχέση με τα ακρότατα μίας συνάρτησης, έτσι ώστε να μπορούμε, αν οι συνθήκες αυτές ικανοποιούνται για κάποια σημεία, να αποφανθούμε απευθείας ότι αυτά είναι ακρότατα της συνάρτησης.

3.2 Το θεώρημα του Rolle

Ας περάσουμε τώρα σε ένα άλλο θεώρημα που θα μας δώσει τα βασικά εργαλεία για να αποδείξουμε το κεντρικό θεώρημα του κεφαλαίου (το Θεώρημα Μέσης Τιμής). Η ιδέα του θεωρήματος του Rolle είναι η εξής: αν ξεκινήσουμε από μία συγκεκριμένη θέση, ας πούμε την πόλη Jubail⁸ και ακολουθήσουμε μία ευθύγραμμη πορεία⁹ και, μετά από κάποιο χρονικό διάστημα ξαναβρεθούμε στην ίδια ακριβώς θέση με αυτήν που ξεκινήσαμε, τότε, σίγουρα, κάποια στιγμή, η ταχύτητά μας ήταν ακριβώς μηδέν (0), δηλαδή, κάποια στιγμή, σταματήσαμε να προχωράμε.

Αυτό, αν το καλοσκεφτείτε, είναι απόλυτα λογικό, αφού, για να ξεκινήσουμε από ένα μέρος και, κινούμενοι ευθύγραμμα, να βρεθούμε ξανά στο ίδιο μέρος, πρέπει, σε κάποια στιγμή, να γυρίσουμε πίσω, άρα, έστω και για μια στιγμή, θα σταματήσουμε για να βάλουμε «όπισθεν», αν θεωρήσουμε ότι μιλάμε για ένα κινούμενο σημείο, οπότε δεν μπορούμε να κάνουμε μια «πιρουέτα» καθώς προχωράμε¹⁰.

Η ιδέα αυτή, γίνεται αυστηρά μαθηματικά μέσα από το θεώρημα του Rolle.

Θεώρημα 3 (του Rolle)

Αν $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση που ικανοποιεί τα εξής:

- συνεχής στο $[a, b]$,
- παραγωγίσιμη στο (a, b) και
- $f(a) = f(b)$,

τότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = 0.$$

Απόδειξη

Αφού η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ από το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής, έπεται ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, b]$, τέτοια ώστε:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad \forall x \in [a, b].$$

Ας εξετάσουμε πρώτα τις περιπτώσεις τα x_1, x_2 να είναι και τα δύο στα άκρα του διαστήματος $[a, b]$, δηλαδή $x_1 = a$ και $x_2 = b$ ή $x_1 = b$ και $x_2 = a$. Σε κάθε περίπτωση, εφ' όσον $f(a) = f(b)$, θα πρέπει να ισχύει:

$$f(x_1) = f(x_2) = f(a) = f(b).$$

Για ευκολία, ας ονομάσουμε c αυτήν την κοινή τιμή, δηλαδή:

$$c = f(x_1) = f(x_2) = f(a) = f(b).$$

Τότε, αφού:

$$c = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = c, \quad \forall x \in [a, b],$$

έπεται ότι:

$$f(x) = c, \quad \forall x \in [a, b],$$

επομένως, η f είναι σταθερή στο $[a, b]$, άρα και στο (a, b) . Όμως η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) , άρα θα πρέπει να ισχύει:

$$f'(x) = (c)' = 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

⁸Μία πόλη στα ανατολικά της Σαουδικής Αραβίας, που βρέχεται από τον Περσικό Κόλπο.

⁹Από την πόλη Jubail ξεκινά ο μεγαλύτερος ευθύγραμμος αυτοκινητόδρομος του κόσμου, ο Highway 85, που έχει μήκος 1.116 χιλιομέτρα, επομένως, έχουμε αρκετές επιλογές.

¹⁰Προφανώς, έχουμε και την επιλογή να κάνουμε τον γύρω της Γης πάνω σε μία ευθεία, αλλά, μιας και αυτό δε γίνεται μόνο με περπάτημα ή, εν γένει, με κίνηση στην ξηρά, πρέπει να αποδεχτούμε την μοίρα μας και κάνουμε αναστροφή σε κάποιο σημείο.

Έτσι, το ζητούμενο έπεται άμεσα, αν πάρουμε για x_0 οποιονδήποτε αριθμό στο ανοικτό διάστημα (a, b) (για παράδειγμα, $x_0 = \frac{a+b}{2}$).

Αν τώρα, έστω κι ένας από τους x_1, x_2 δεν συμπίπτει με τα a, b , ας πούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι αυτός είναι ο x_1 , τότε θα ισχύει:

$$a < x_1 < b,$$

δηλαδή ο x_1 θα βρίσκεται στο εσωτερικό του $[a, b]$, δηλαδή $x_1 \in (a, b)$. Επίσης, η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_1 , το $f(x_1)$, και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό το σημείο, αφού είναι παραγωγίσιμη σε όλο το ανοικτό διάστημα (a, b) , άρα, από το θεώρημα του Fermat θα ισχύει ότι:

$$f'(x_1) = 0,$$

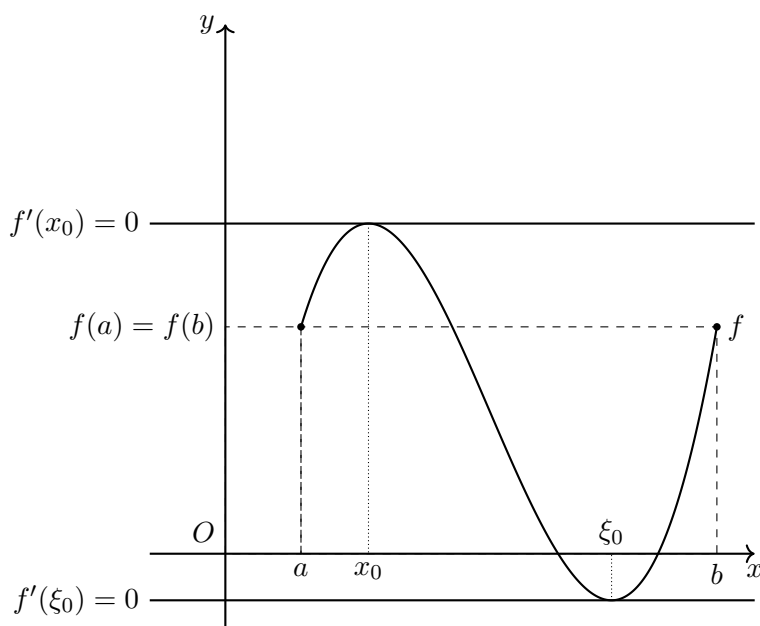
οπότε, και πάλι, έχουμε το ζητούμενο, για $x_0 = x_1$.

Άρα, σε κάθε περίπτωση, υπάρχει ένα $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_0) = 0,$$

που ήταν και το ζητούμενο.

Αυτό που μας λέει ο κύριος Rolle, με άλλα λόγια, είναι ότι με αυτές τις υποθέσεις εξασφαλίζουμε ότι η f έχει, σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της, μία τουλάχιστον οριζόντια εφαπτομένη, δηλαδή μία εφαπτομένη με κλίση ίση με το μηδέν, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.3.



Σχήμα 3.3: Η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Rolle.

3.3 Εφαρμογές του θεωρήματος του Rolle

Το θεώρημα του Rolle έχει αρκετές εφαρμογές σε σχέση με προβλήματα που μας έχουν απασχολήσει κατά καιρούς και τυχάνει να αφορούν συναρτήσεις που ήταν παραγωγίσιμες. Θα δούμε σε αυτήν εδώ την υποενότητα τις σημαντικότερες από αυτές τις εφαρμογές.

3.3.1 Πλήθος λύσεων εξισώσεων

Το συμπέρασμα του θεωρήματος του Rolle μας δίνει, επί της ουσίας, την ύπαρξη μιας ρίζας της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα ανοικτό διάστημα. Θα πει κανείς ότι την ίδια δουλειά έκανε και το θεώρημα του Bolzano και, μάλιστα, χωρίς να απαιτεί η συνάρτησή μας να είναι και παραγωγίσιμη, αλλά μόνο συνεχής. Πράγματι, αυτό είναι αλήθεια, αλλά η χρησιμότητα του εν λόγω θεωρήματος είναι λίγο διαφορετική, στην προκειμένη μας δίνει το ακριβές πλήθος των λύσεων της εξίσωσης. Για να το καταλάβουμε αυτό καλύτερα, ας δούμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3

Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$x^5 - 4x + 2 = 0,$$

έχει ακριβώς 3 λύσεις. Αρχικά, πριν προλάβετε να πείτε κάτι, στην εισαγωγή του πρώτου κεφαλαίου έχουμε αναφέρει ότι για πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του τέσσερα (4), δεν έχουμε τύπο για τις λύσεις τους, επομένως, αυτή η εξίσωση δεν είναι τετριμμένη. Προχωρώντας τώρα στο πρόβλημά μας, για την ύπαρξη των ριζών, μπορούμε να εργαστούμε κανονικά με βάση το θεώρημα του Bolzano, ψάχνοντας τρία κατάλληλα διαστήματα. Μετά από λίγους πειραματισμούς, βρίσκουμε ότι, για την $f(x) = x^5 - 4x + 2$, ισχύουν:

$$f(-2) = -22 < 0$$

$$f(0) = 2 > 0$$

$$f(1) = -1 < 0$$

$$f(2) = 26 > 0$$

και, επειδή η f είναι συνεχής (ως πολυωνυμική) στα κλειστά διαστήματα $[-2, 0]$, $[0, 1]$ και $[1, 2]$, από το θεώρημα του Bolzano, έπεται ότι υπάρχουν $x_1 \in (-2, 0)$, $x_2 \in (0, 1)$ και $x_3 \in (1, 2)$ έτσι ώστε:

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0.$$

Άρα, έχουμε αποδείξει ότι η f έχει τουλάχιστον τρεις ρίζες, οπότε είμαστε σε καλό δρόμο. Αρκεί να δείξουμε ότι αυτές είναι και μοναδικές. Πώς όμως; Η f , ξεκάθαρα, δεν είναι 1-1 (αφού έχει τρεις τουλάχιστον ρίζες) και, επίσης, δεν είναι εύκολο, από τον τύπο της, να τη μελετήσουμε ως προς την μονοτονία. Εδώ έρχεται να μας βοηθήσει το θεώρημα του Rolle.

Ας δούμε λίγο τι απαιτούν οι υποθέσεις του θεωρήματος: συνέχεια και παραγωγισιμότητα, που τις έχουμε σε όλο το \mathbb{R} , οπότε δεν υπάρχει θέμα, και ένα διάστημα στο οποίο οι τιμές της συνάρτησης να ταυτίζονται. Ποιο διάστημα να πάρουμε; Αν δείτε λίγο παραπάνω, θα δείτε ότι γράψαμε ότι ικανοποιείται η σχέση:

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0.$$

για τα x_1, x_2, x_3 , με $x_1 < x_2 < x_3$ (η σειρά τους προκύπτει από τον τρόπο με τον οποίο εφαρμόσαμε το θεώρημα του Bolzano στα παραπάνω διαστήματα). Έτσι, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Rolle στα διαστήματα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$, οπότε θα πάρουμε $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ και $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0.$$

Και θα πει κάποιος, ε, και τι με αυτό; Η αλήθεια είναι πως δεν πήραμε κάτι χρήσιμο, παρά μόνο ότι η παράγωγος της f , που είναι η:

$$f'(x) = 5x^4 - 4,$$

έχει δύο ρίζες, πράγμα που ούτως ή άλλως ξέραμε, γιατί η εξίσωση $f'(x) = 0$ είναι εύκολο να επιλυθεί, αφού:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^4 = \frac{4}{5} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{\frac{4}{5}}.$$

Κι εδώ μας έρχεται η φώτιση. Αυτό που κάναμε πριν από λίγο ήταν να δείξουμε ότι ανάμεσα σε κάθε δύο διαδοχικές ρίζες της f κρυβόταν και μία ρίζα της f' . Επομένως, αφού ξέρουμε ότι η f' έχει ακριβώς δύο ρίζες, όπως είδαμε μόλις τώρα, σημαίνει ότι δεν έχει 3 ή περισσότερες¹¹.

Ας υποθέσουμε, εμείς, προς άτοπο, ότι η f πέρα από τις τρεις ρίζες που βρήκαμε, έχει και μία τέταρτη, ας την πούμε x_4 . Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι είναι μεγαλύτερη από όλες, δηλαδή ότι¹²:

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4.$$

Τότε, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[x_3, x_4]$, δεδομένου ότι:

$$f(x_3) = f(x_4) = 0,$$

παίρνουμε ότι υπάρχει ένα $\xi_3 \in (x_3, x_4)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi_3) = 0.$$

Όμως, $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$, άρα η f' έχει τρεις διαφορετικές ρίζες, άτοπο, αφού, όπως είδαμε παραπάνω, έχει ακριβώς δύο. Επομένως, η f έχει ακριβώς τρεις ρίζες, που ήταν και το ζητούμενο.

3.3.2 1-1 συναρτήσεις

Ας πούμε ότι θέλουμε να αποδείξουμε ότι μία συνάρτηση είναι 1-1. Έχουμε δύο βασικά εργαλεία: τον ορισμό και το αντιθετοαντίστροφό του και το να δείξουμε ότι είναι γνησίως μονότονη σε όλο το πεδίο ορισμού της, όταν αυτό είναι διάστημα, πάντα. Ας υποθέσουμε τώρα ότι μας ζητείται να δείξουμε ότι είναι 1-1 η παρακάτω συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 + x - x \ln x, \quad x > 0.$$

όπου, ούτε με τον ορισμό ή το αντιθετοαντίστροφό του μπορούμε να εργαστούμε ούτε με τον ορισμό της μονοτονίας. Μπορούμε, όμως, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα να εκμεταλλευτούμε την παραγωγισιμότητα της f σε όλο το πεδίο ορισμού της, όπως θα φανεί παρακάτω.

Αρχικά, αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγό της:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 + x - x \ln x)' = \\ &= 2x + 1 - (x)' \ln x - x(\ln x)' = \\ &= 2x + 1 - \ln x - x \frac{1}{x} = \\ &= 2x + 1 - \ln x - 1 = \\ &= 2x - \ln x. \end{aligned}$$

Εδώ, χρησιμοποιώντας τη γνωστή ανισότητα¹³

$$\ln x \leq x - 1,$$

¹¹Σώπα...

¹²Πράγματι, αν δεν ήταν, τότε θα τους αλλάζαμε τα ονόματα έτσι ώστε να είναι με αυτήν τη σειρά.

¹³Αν δεν τη θυμάστε, αυτή προκύπτει εύκολα θέτοντας $\ln x$ στη θέση του x στην ανισότητα:

$$e^x \geq x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

και επειδή $x > 0$, έπεται:

$$\ln x \leq x - 1 < x < 2x - 1,$$

επομένως:

$$2x - \ln x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0,$$

άρα, ειδικότερα:

$$f'(x) \neq 0.$$

Έστω τώρα, προς άτοπο, ότι η f δεν είναι 1-1. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ τέτοια ώστε $x_1 \neq x_2$ και:

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $x_1 < x_2$. Αφού η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και $f(x_1) = f(x_2)$, έπεται, από το θεώρημα του Rolle, ότι υπάρχει ένα $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_0) = 0,$$

άτοπο, διότι δείξαμε παραπάνω ότι $f'(x) \neq 0$. Επομένως, η f είναι 1-1.

3.4 Το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.)

Ωραίος ο κύριος Rolle, μας έδωσε και δύο χρήσιμα εργαλεία για να κάνουμε λίγο τη ζωή μας πιο εύκολη. Θυμάστε πώς προέκυψε το εν λόγω θεώρημα; Από εκείνη την παρατήρηση ότι αν ξεκινήσουμε από ένα μέρος και, κινούμενοι ευθύγραμμα, ξαναβρεθούμε στο ίδιο μέρος χωρίς να έχουμε κάνει τον γύρω της Γης, τότε θα έχουμε, αναγκαστικά σταματήσει τουλάχιστον μία στιγμή στη διαδρομή μας. Κάνουμε εδώ μία ανάλογη σκέψη: ας υποθέσουμε ότι κινούμαστε και πάλι ευθύγραμμα ξεκινώντας από μία θέση A και, μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, καταλήγουμε σε μία θέση B (ενδεχομένως και την ίδια με την αρχική μας θέση). Τότε, αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση θέσης μας είναι η $x(t)$, με $t \in [0, 5]$, που ο χρόνος μετριέται σε ώρες, η μέση ταχύτητα με την οποία κινούμαστε θα δίνεται από τη σχέση:

$$v_{\text{μέση}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(5) - x(0)}{5 - 0} = \frac{x(5) - x(0)}{5}.$$

Αυτά, λίγο έως πολύ είναι γνωστά και δεν περιέχουν τίποτα το καινούργιο. Ας σκεφτούμε τώρα το εξής: η ταχύτητά μας, εν γένει, δεν είναι σταθερή και, προφανώς, δεν είναι κάθε στιγμή ίση με τη μέση ταχύτητά μας. Γίνεται όμως να είναι μονίμως διαφορετική; Ας πούμε ότι γίνεται. Τότε, σε κάποιο διάστημα, θα έχουμε ταχύτητα μικρότερη από τη μέση ταχύτητα και σε κάποιο άλλο μεγαλύτερη; Και πώς έγινε και φτάσαμε να έχουμε μεγαλύτερη ταχύτητα από τη μέση ταχύτητα ενώ είχαμε μικρότερη χωρίς να έχουμε «περάσει» και από τη μέση ταχύτητα, $v_{\text{μέση}}$; Προφανώς, αν δεχθούμε ότι η κίνησή μας είναι κάπως ομαλή, αυτό δε γίνεται. Επομένως, κάποια χρονική στιγμή θα κινούμαστε ακριβώς με ταχύτητα ίση με τη $v_{\text{μέση}}$, δηλαδή μία δεδομένη χρονική στιγμή t_0 θα ισχύει:

$$v(t_0) = v_{\text{μέση}},$$

ή, αν λαβουμε υπ' όψιν μας ότι $v(t) = x'(t)$:

$$x'(t_0) = \frac{x(5) - x(0)}{5}.$$

Αυτήν την ιδέα έρχεται να εκφράσει το Θεώρημα Μέσης Τιμής το οποίο, όπως θα φαντάζεστε, λέγεται έτσι γιατί μπλέκει και τη μέση τιμή¹⁴ μιας συνάρτησης $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι η:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

¹⁴Εννοούμε τη μέση τιμή με την έννοια και το σχεπτικό της παραπάνω ανάλυσης που κάναμε για τη μέση «ταχύτητα» της f . Θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο και μία καλύτερη τυπική έκφραση για μια «άλλη» μέση τιμή.

Ας δούμε τώρα το θεώρημα μαζί με την απόδειξή του.

Θεώρημα 4 (Θεώρημα Μέσης Τιμής)

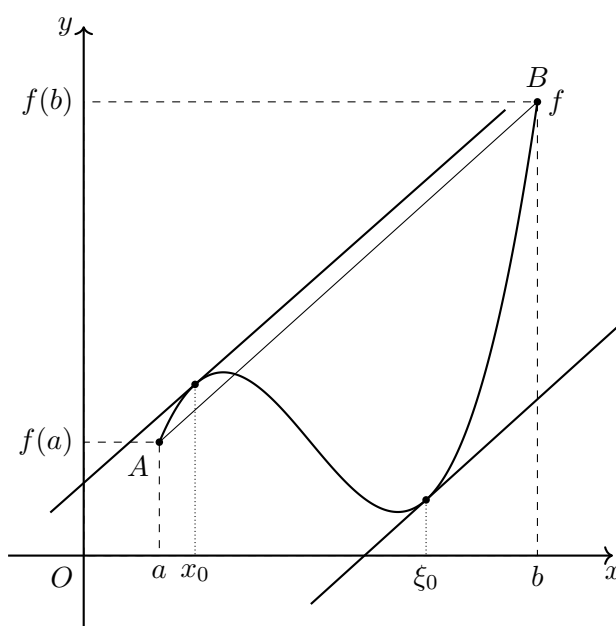
Αν $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση που ικανοποιεί τα εξής:

- είναι συνεχής στο $[a, b]$,
- είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) ,

τότε υπάρχει ένα $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Πριν προχωρήσουμε στη απόδειξη, ας δούμε λίγο τη γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Μ.Τ. που θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη και κατά την απόδειξή του. Όπως βλέπουμε και στο σχήμα 3.4, αυτό που πρακτικά μας λέει το Θ.Μ.Τ. είναι ότι υπάρχει ένα σημείο $(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη της f να έχει κλίση ακριβώς τόση όση και η κλίση της χορδής με άκρα τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(b, f(b))$. Αυτό, αν σκεφτούμε ότι η κλίση της χορδής AB εκφράζει τη μέση ταχύτητα του σώματος κατά την κίνησή του από το A στο B και η κλίση της εφαπτομένης εκφράζει τη στιγμιαία ταχύτητα του σώματος κάποια στιγμή, συνάδει απόλυτα με τη συζήτηση που κάναμε προηγουμένως.



Σχήμα 3.4: Η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.

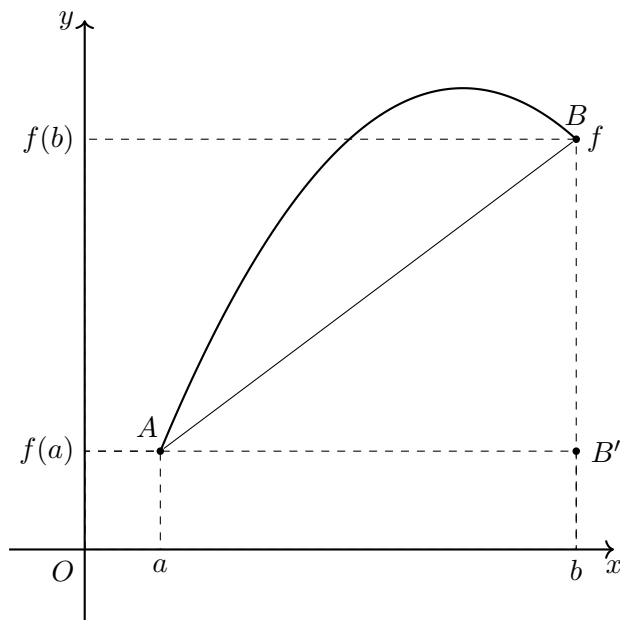
Απόδειξη

Η απόδειξη του Θεωρήματος Μέσης Τιμής θα γίνει με εφαρμογή του Θεωρήματος του Rolle για κάποια (θα τη βρούμε τώρα) κατάλληλη συνάρτηση¹⁵ g . Η κεντρική διαφορά, λαμβάνοντας υπ' όψιν τη γεωμετρική ερμηνεία των δύο θεωρημάτων, είναι ότι, στο θεώρημα του Rolle έχουμε μία χορδή που είναι παράλληλη με τον άξονα x' ενώ στο θεώρημα μέσης τιμής έχουμε μία χορδή που είναι πιο «γενική», με οποιαδήποτε δυνατή κλίση:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

¹⁵ Σε αυτήν την απόδειξη θα γίνει πρώτα μια μεγάλη συζήτηση για το πώς επιλέγουμε τη συνάρτηση g την οποία, προφανώς, δε χρειάζεται να επαναλαμβάνουμε κάθε φορά που κάνουμε την απόδειξη ή/και χρησιμοποιούμε το θεώρημα μέσης τιμής.

Επομένως, αν μπορούσαμε κάπως να «στρίψουμε» τη γραφική παράσταση της f έτσι ώστε να φέρουμε τη χορδή AB να είναι οριζόντια, θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Rolle και να τελειώσουμε. Το θέμα είναι ότι, προφανώς, δεν μπορούμε να στρίψουμε τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης και να είμαστε σίγουροι ότι θα παραμείνει συνάρτηση¹⁶. Ας δούμε μία γραφική παράσταση που θα μας βοηθήσει στο έργο μας (βλ. σχήμα 3.5).



Σχήμα 3.5: Μία συνάρτηση για την απόδειξη του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.

Είπαμε ότι δεν μπορούμε να τη «στρίψουμε» γιατί τότε δε θα είναι συνάρτηση, αλλά, υπάρχει κι άλλος τρόπος να «κατεβάσουμε» τη χορδή AB έτσι ώστε να είναι οριζόντια. Ας κρατήσουμε, για αρχή, το σημείο $A(a, f(a))$ σταθερό, οπότε, για να γίνει η AB οριζόντια, πρέπει να «κατεβάσουμε» το σημείο $B(b, f(b))$ στο σημείο $B'(b, f(a))$ (βλ. σχήμα 3.5). Αλλά, αν κατεβάσουμε μόνο αυτό, τότε θα έχουμε θέμα, αφού δε θα είναι συνεχής η συνάρτησή μας, άρα πρέπει να τα «κατεβάσουμε» όλα, έτσι ώστε να μη χαλάσει η συνέχεια και η παραγωγισιμότητα της συνάρτησής μας. Αλλά πόσο;

Με μια ματιά στο σχήμα 3.6, η ιδέα που θα περιγράψουμε γίνεται αρκετά σαφής. Για να «κατεβάσουμε» το B στο B' το μεταφέραμε προς τα κάτω κατά $f(b) - f(a)$ ενώ το A δεν το μετακινήσαμε καθόλου. Αν πάμε τώρα σε ένα σημείο $P(x, f(x))$ της γραφικής παράστασης της f , με $x \in (a, b)$, τότε, θα επιλέξουμε να κατεβάσουμε αυτό το σημείο τόσο όσο και το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος μεταξύ της AB και της AB' που είναι παράλληλο στον άξονα $y'y$. Για να βρούμε αυτό το μήκος (το QQ' του σχήματος 3.6), θα χρειαστούμε την εξίσωση της ευθείας AB που είναι η:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

ή, σε ποιο εύχρηστη μορφή:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

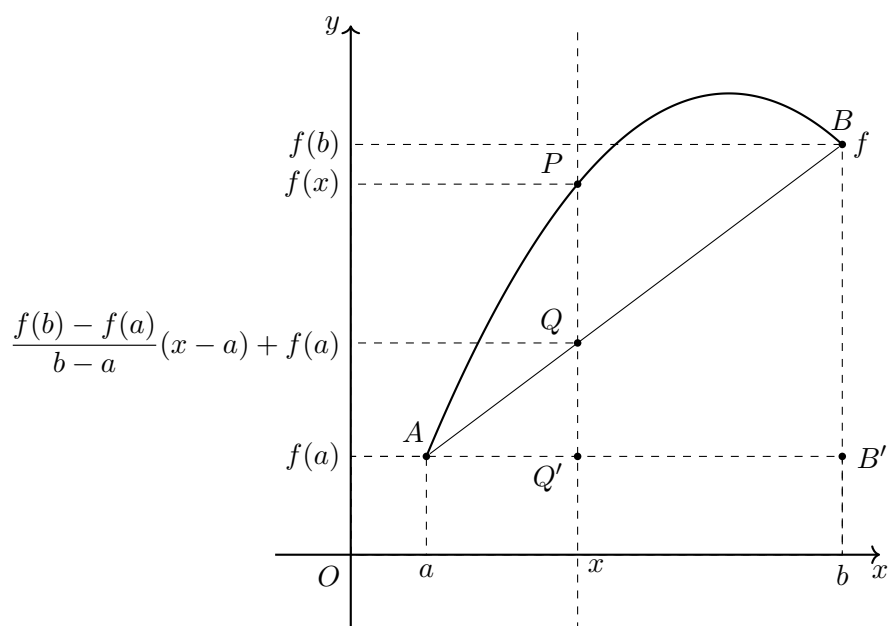
Τότε, δεδομένου ότι η ευθεία AB' έχει εξίσωση:

$$y = f(a),$$

¹⁶ Σχεφτείτε ένα ημικύκλιο που το στρίβετε κατά κάποια οξεία γωνία, οπότε και παύει να είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.

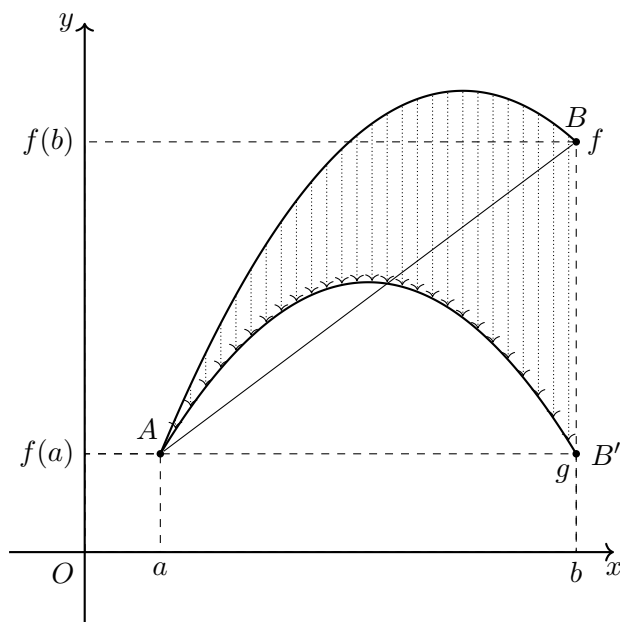
το μήκος του QQ' είναι¹⁷:

$$(QQ') = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$



Σχήμα 3.6: Το μήκος (QQ') .

Αν «κατεβάσουμε» κάθε σημείο της γραφικής παράστασης της f κατ' αυτόν τον τρόπο, τότε θα πάρουμε μια νέα συνάρτηση, όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 3.7.



Σχήμα 3.7: Η «ψευδοστροφή» της f .

Μετά από τόσο κόπο, επιλέγουμε για $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

¹⁷Μπορείτε να βρείτε το εν λόγω μήκος καθαρά γεωμετρικά, παρατηρώντας ότι τα τρίγωνα ABB' και AQQ' είναι όμοια και εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Θαλή.

Για την g έχουμε:

- η g είναι συνεχής στο $[a, b]$ ως διαφορά συνεχών,
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) ως διαφορά παραγωγίσιμων και,
- $g(a) = g(b) = f(a)$, διότι:

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a),$$

και,

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a),$$

επομένως, από το θεώρημα του Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε:

$$g'(x_0) = 0.$$

Η παράγωγος της g είναι:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

επομένως:

$$f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

που ήταν το ζητούμενο.

Παρατήρηση 3

Αν έχουμε μία συνάρτηση που ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, τότε, εφ' όσον ικανοποιεί και τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, έπεται, από το Θ.Μ.Τ., ότι υπάρχει ένα $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \stackrel{f(b)=f(a)}{=} 0,$$

επομένως, θα έλεγε κανείς ότι το θεώρημα του Rolle είναι ένα απλό πόρισμα του Θ.Μ.Τ., πράγμα που, προφανώς, είναι λάθος. Αν το καλοσκεφτείτε, το θεώρημα του Rolle είναι αυτό που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του Θ.Μ.Τ., επομένως, το Θ.Μ.Τ. είναι μία γενίκευση του θεωρήματος του Rolle, μας δίνει δηλαδή αποτελέσματα σε πιο γενικές περιπτώσεις¹⁸.

3.5 Εφαρμογές του Θεωρήματος Μέσης Τιμής

το θεώρημα μέσης τιμής, ως πιο γενικό εργαλείο, έχει αρκετές εφαρμογές, πολλές εκ των οποίων μας «λύνουν τα χέρια» σε διάφορα ενδιαφέροντα προβλήματα. Ακόμα μεγαλύτερη σημασία, βέβαια, έχουν οι συνέπειες του Θ.Μ.Τ. τις οποίες θα δούμε σε ξεχωριστή ενότητα, λόγω της έκτασης και της σημασίας τους.

3.5.1 Ύπαρξη εφαπτομένης με δεδομένη κλίση

Μία σχετικά προφανής εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. είναι το ότι μας βοηθά να αποδείξουμε την ύπαρξη εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με μία συγκεκριμένη κλίση, όπως φαίνεται και στο επόμενο παράδειγμα.

¹⁸ Αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι έχει λιγότερες υποθέσεις και ότι μας δίνει το ίδιο συμπέρασμα στις περιπτώσεις που «δουλεύει» το θεώρημα του Rolle.

Παράδειγμα 4

Να δείξετε ότι η συνάρτηση:

$$f(x) = e^{x^4+2x^2},$$

έχει εφαπτομένη με κλίση $1 - e^3$ στο διάστημα $(-1, 0)$.

Αφού η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε όλο το \mathbb{R} ως πράξεις συνεχών/παραγωγίσιμων συναρτήσεων, έπεται ότι θα ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[-1, 0]$. οπότε θα υπάρχει ένα: $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_0) = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{1 - e^3}{1} = 1 - e^3,$$

που ήταν το ζητούμενο, μιας και η παράγωγος μιας συνάρτησης είναι ακριβώς η κλίση της εφαπτομένης της σε εκείνο το σημείο στο οποίο την υπολογίζουμε.

Παρατήρηση 4

Παρατηρήστε ότι, αν παραγωγίσουμε την f παίρνουμε:

$$f'(x) = e^{x^4+2x^2}(x^4 + 2x^2)' = (4x^3 + 4x)e^{x^4+2x^2},$$

η οποία είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών και, μάλιστα:

$$f'(0) = 0, \text{ και } f'(-1) = -8e^3.$$

Τώρα, αφού:

$$0 > 1 - e^3 > -8e^3,$$

έπεται, από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών (Θ.Ε.Τ.), ότι υπάρχει ένα $x_0 \in (-1, 0)$ τέτοι ώστε:

$$f'(x_0) = 1 - e^3.$$

Απλώς, γλυτώσαμε χρόνο σε αυτήν την περίπτωση¹⁹, παρακάμπτοντας το Θ.Ε.Τ. και την παραγωγή και όλα αυτά.

3.5.2 Απόδειξη ανισοτήτων

Όσο κι αν φαίνεται παράξενο, με τη χρήση του Θ.Μ.Τ. μπορούμε να αποδείξουμε διάφορες ανισότητες, πράγμα, μάλιστα, που θα αξιοποιήσουμε και σε κάποιες αποδείξεις μας στην επόμενη ενότητα. Ας δούμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 5

Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα:

$$x^2 - x + x \ln x > 2(x - 1), \quad \forall x > 1.$$

Εδώ, τα πράγματα ίσως φαίνονται σκούρα, στην αρχή και, η αλήθεια είναι ότι, αν κανείς δεν έχει την απαραίτητη εξοικείωση με τέτοιου είδους χειρισμούς, δύσκολα «βλέπει» κατά πού πάει το πράγμα. Ο στόχος μας είναι να εμφανίσουμε στο ένα μέλος της ανισότητας μία παράσταση της μορφής:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

¹⁹Θα πει κανείς τώρα ότι αν η παράγωγος της f δεν είναι συνεχής, τότε δεν μπορούμε να κάνουμε το παραπάνω και να εφαρμόσουμε το Θ.Ε.Τ., πράγμα που είναι αλήθεια. Όμως, μπορούμε να αποδείξουμε, αν και, μάλλον, δε θα το κάνουμε, ότι η παράγωγος μίας συνάρτησης ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θ.Ε.Τ. ακόμα κι αν δεν είναι συνεχής, πράγμα που, και πάλι, θα μας επέτρεπε να εργαστούμε έτσι, χωρίς να έχουμε τη συνέχεια της f' . Αυτή η ιδιότητα των παραγώγων λέγεται ιδιότητα *Darboux*.

και μετά να εφαρμόσουμε Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[x_0, x]$ ή στο διάστημα $[x, x_0]$. Γενικά, μπορούμε να δοκιμάσουμε διάφορες συναρτήσεις, πάντα διαλέγοντας κάποια παράσταση από αυτές που εμφανίζονται στην ανισότητα και αρχίζουμε να «παίζουμε». Για παράδειγμα, αν εδώ διαλέξουμε για:

$$f(x) = x^2 - x + x \ln x, x > 0,$$

τότε παρατηρούμε ότι:

$$f(1) = 1 - 1 + 1 \ln 1 = 0,$$

οπότε, αν πάρουμε για x_0 το 1, έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - x + x \ln x}{x - 1},$$

οπότε, αφού $x > 1$, η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε γράφεται στη μορφή:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} > 2, \forall x > 1.$$

Επιλέγουμε τώρα και σταθεροποιούμε μια τιμή για τη²⁰ x , με $x > 1$. Τώρα, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, x]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(1, x)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, επομένως, από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $x_0 \in (1, x)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

Τώρα, για την παράγωγο της f , παρατηρούμε ότι:

$$f'(x) = 2x - 1 + (x)' \ln x + x(\ln x)' = 2x - 1 + \ln x + x \frac{1}{x} = 2x + \ln x.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, αφού, για κάθε $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, ισχύει:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2x_1 < 2x_2, \quad (1)$$

και:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2, \quad (2)$$

οπότε, προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω, έχουμε:

$$2x_1 + \ln x_1 < 2x_2 + \ln x_2 \Leftrightarrow f'(x_1) < f'(x_2),$$

επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Αφού, τώρα $x_0 \in (1, x)$, έπεται ότι $x_0 > 1$, επομένως:

$$x_0 > 1 \Leftrightarrow f'(x_0) > f'(1) = 2,$$

επομένως, δείξαμε ότι:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} > 2,$$

αφού:

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1},$$

που ήταν και το ζητούμενο.

²⁰Είναι «η x », ως μετβλητή, και «σταθεροποιούμε» μια τιμή γιατί, ως μεταβλητή, μπορεί να πάρει διάφορες τιμές. Εφ' όσον εμείς θέλουμε να αποδείξουμε κάτι για κάθε $x > 1$, μπορούμε να το δείξουμε για μία, οποιαδήποτε, τιμή της x και, αφού το δείξαμε για αυτήν την αυθαίρετη τιμή της x , το έχουμε δείξει για όλες όσες θέλουμε. Πριν πείτε ότι αυτό είναι τρελό, σκεφτείτε τι κάνουμε τόσα χρόνια στη γεωμετρία: μας ζητείται να αποδείξουμε π.χ. ότι κάθε τρίγωνο έχει άθροισμα γωνιών ίσο με δύο ορθές και εμείς σχεδιάζουμε ένα τρίγωνο και αποδεικνύουμε αυτό που μας ζητείται για αυτό το τρίγωνο. Επειδή όμως το τρίγωνο που σχεδιάσαμε ήταν αυθαίρετο, μπορούμε να πούμε ότι η απόδειξή μας είχε την απαραίτητη γενικότητα για να ισχύει αυτό για όλα τα τρίγωνα.

Κεφάλαιο 4

Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής

Πέρα από κάποιες εφαρμογές του Θ.Μ.Τ., έχουμε και κάποια πολύ σημαντικά πορίσματα και προτάσεις που προκύπτουν από αυτό και τα οποία μας δίνουν νέες εναλλακτικές, πιο απλές και πιο γενικές, σε σχέση με προβλήματα που έχουμε αντιμετωπίσει σε προηγούμενα κεφάλαια.

4.1 Σταθερή συνάρτηση

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις ορισμένες σε ένα διάστημα και παραγωγίσιμες, τότε ισχύει το ακόλουθο:

$$f = g \Rightarrow f' = g'.$$

Μπορούμε όμως να ισχυριστούμε ότι ισχύει και το αντίστροφο; Ότι, με άλλα λόγια, ισχύει η συνεπαγωγή:

$$f' = g' \Rightarrow f = g;$$

Η παρακάτω συζήτηση και οι δύο προτάσεις που θα παρουσιάσουμε δίνουν μία απάντηση με μία «γλυκόπιχη» επίγευση¹.

Ας πάρουμε μία συνεχή συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, ανοικτό ή κλειστό, δεν έχει σημασία, και ας υποθέσουμε ότι η f έχει παράγωγο ίση με το μηδέν σε κάθε εσωτερικό σημείο του, δηλαδή:

$$f'(x) = 0, \text{ για κάθε εσωτερικό σημείο του } \Delta.$$

Τι πάει να πει αυτό; Αν λάβουμε υπ' όψιν μας ότι η παράγωγος της συνάρτησης ισούται με την κλίση της εφαπτομένης σε εκείνο το σημείο, τότε έχουμε ότι η f έχει εφαπτομένη σε κάθε εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της και μάλιστα όλες αυτές οι εφαπτόμενες είναι οριζόντιες. Είπαμε επίσης ότι, διαισθητικά, η εφαπτομένη της f σε ένα σημείο της είναι η ευθεία εκείνη που διέρχεται από εκείνο το σημείο και «μοιάζει», περισσότερο από κάθε άλλη ευθεία, που διέρχεται από το ίδιο σημείο, με τη γραφική παράσταση της f . Επομένως, σε κάθε σημείο της, η f μοιάζει με μία ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. Μήπως αυτό σημαίνει ότι είναι και η ίδια μία ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$; Δηλαδή, μήπως οι μόνες συναρτήσεις που έχουν μηδενική παράγωγο στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού τους, όταν αυτό είναι διάστημα, είναι οι σταθερές;

¹Ποίηση τα μαθηματικά, ποιητικές και οι εκφράσεις που χρησιμοποιούμε γι' αυτά. Προσπαθήστε να εξηγήσετε, στο τέλος της ενότητας, γιατί η επίγευση των δύο επόμενων προτάσεων είναι «γλυκόπιχη».

Πρόταση 11

Αν $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση, Δ είναι ένα διάστημα και η f είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ και, μάλιστα,:

$$f'(x) = 0, \text{ για κάθε εσωτερικό σημείο του } \Delta,$$

τότε η f είναι σταθερή, δηλαδή, υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$$f(x) = c, \forall x \in \Delta.$$

Απόδειξη

Για να αποδείξουμε ότι η f είναι σταθερή, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$f(x_1) = f(x_2), \forall x_1, x_2 \in \Delta.$$

Δηλαδή, πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε δύο αριθμούς του Δ , η f παίρνει την ίδια ακριβώς τιμή. Έστω, λοιπόν, $x_1, x_2 \in \Delta$. Αν $x_1 = x_2$, τότε, επειδή η f είναι συνάρτηση², έπεται ότι:

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Αν τώρα $x_1 \neq x_2$, ας υποθέσουμε και χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x_1 < x_2$, τότε έχουμε ότι:

- η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, αφού είναι συνεχής και στο Δ και $[x_1, x_2] \subseteq \Delta$,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , αφού είναι παραγωγίσιμη και στο εσωτερικό του Δ και το (x_1, x_2) περιέχεται στο εσωτερικό του Δ .

Επομένως, η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[x_1, x_2]$, άρα υπάρχει ένα $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοι ώστε:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Όμως, το x_0 βρίσκεται στο εσωτερικό του³ Δ , επομένως:

$$f'(x_0) = 0,$$

επομένως, αφού $x_2 \neq x_1$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = f(x_1),$$

που ήταν το ζητούμενο. Επομένως, η f είναι σταθερή στο Δ .

Παρατήρηση 5

Η υπόθεση το Δ να είναι διάστημα είναι αναγκαία αφού, αν πάρουμε τη συνάρτηση⁴:

$$f(x) = \begin{cases} 2019 & x > 0 \\ 2018 & x < 0 \end{cases}$$

τότε εύκολα βλέπουμε ότι:

$$f'(x) = 0, \forall x \neq 0,$$

ενώ η f δεν είναι σταθερή. Εντούτοις, είναι σταθερή σε κάθε ένα από τα διαστήματα που ορίζουν το πεδίο ορισμού της.

Το παραπάνω μπορεί να γενικευθεί στην ακόλουθη, ιδιαίτερα χρήσιμη, πρόταση:

²Προφανώς, το να είναι η f συνάρτηση είναι αναγκαίο, αλλιώς δε θα είχαμε το μονοσήμαντο του $f(x_1)$ (θυμηθείτε το παράδειγμα με τους γονείς και τα παιδιά).

³Γιατί;

⁴Θα μπορούσαμε να την ονομάσουμε και συνάρτηση αλλαγής χρόνου (αστείο...).

Πρόταση 12

Αν $f, g : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις, Δ είναι ένα διάστημα και οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο εσωτερικό του Δ με:

$$f'(x) = g'(x), \text{ για κάθε εσωτερικό σημείο του } \Delta,$$

τότε υπάρχει ένας σταθερός αριθμός $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε:

$$f(x) = g(x) + c.$$

Απόδειξη

Έστω $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \Delta$. Τότε, η h είναι συνεχής στο Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του ως διαφορά συνεχών/παραγωγίσιμων συναρτήσεων και, επίσης:

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0,$$

επομένως, η h ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις της προηγούμενης πρότασης, άρα είναι σταθερή στο Δ , δηλαδή υπάρχει ένας σταθερός αριθμός $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε:

$$h(x) = c.$$

Ισοδύναμα:

$$f(x) - g(x) = c \Leftrightarrow f(x) = g(x) + c,$$

που ήταν το ζητούμενο.

Αυτό που μας λέει η παραπάνω πρόταση είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον. Πρακτικά, αν δύο συναρτήσεις έχουν, σε ένα διάστημα, την ίδια παράγωγο, τότε θα διαφέρουν μόνο ως προς το «ύψος» στο οποίο ζουν οι γραφικές τους παραστάσεις, δηλαδή, η μία θα προκύπτει από τη γραφική παράσταση της άλλης μέσω μιας κατακόρυφης μετατόπισης κατά c . Αυτό, αν το καλοσκεφτούμε, δεν είναι και πολύ παράξενο. Τι πάει να πει ότι σε κάθε σημείο η f και η g έχουν την ίδια παράγωγο; Προφανώς, ότι οι εφαπτόμενές τους σε κάθε σημείο έχουν την ίδια κλίση, είναι, δηλαδή, παράλληλες. Αφού οι εφαπτόμενες σε κάθε σημείο είναι παράλληλες και οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων «μοιάζουν» με τις εφαπτόμενές τους, τότε αναμένουμε να είναι και αυτές παράλληλες, όπως και ισχύει. Εποπτικά, αυτό φαίνεται στο σχήμα 4.1.

Οι παραπάνω δύο προτάσεις⁵ μας δίνουν την ευχέρεια να βρίσκουμε τον τύπο μίας συνάρτησης σε κάποιες περιπτώσεις μέσα από την παράγωγή της. Ας δούμε μερικά σχετικά παραδείγματα που θα μας διαφωτίσουν αρκετά⁶.

Παράδειγμα 6

Να βρείτε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$, για την οποία ισχύει η σχέση:

$$f'(x) = x^3 + 2x + 3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

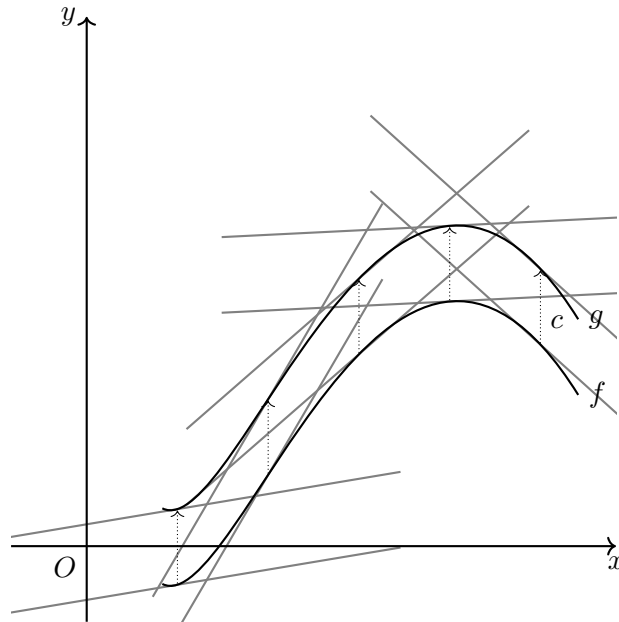
Αν παιδευτούμε λίγο, θα δούμε ότι μία άλλη συνάρτηση που έχει ίδια παράγωγο με την f είναι η:

$$g(x) = \frac{x^4}{4} + x^2 + 3x,$$

⁵Ουσιαστικά πρόκειται για την ίδια πρόταση αφού η δεύτερη αποτελεί γενίκευση της πρώτης.

⁶Να πούμε εδώ ότι το πρόβλημα της εύρεσης του τύπου μιας συνάρτησης μέσα από την παράγωγή της θα μας απασχολήσει και σε επόμενο κεφάλαιο και, μάλιστα, ας έχουμε από τώρα κατά νου ότι αυτό δεν είναι πάντα ένα εύκολο πρόβλημα. Για παράδειγμα, προσπαθήστε να βρείτε μία συνάρτηση f για την οποία να ισχύει:

$$f'(x) = e^{1/x}, \quad x \neq 0.$$



Σχήμα 4.1: Δύο συναρτήσεις με ίδια παράγωγο.

αφού:

$$g'(x) = \frac{4x^3}{4} + 2x + 3 = x^3 + 3x + 3 = f'(x).$$

Επομένως, υπάρχει ένας σταθερός αριθμός $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε:

$$f(x) = g(x) + c, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή όμως $f(0) = 1$, έπεται ότι:

$$f(0) = g(0) + c \Leftrightarrow 1 = 0 + c \Leftrightarrow c = 1,$$

άρα, ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + x^2 + 3x + 1.$$

Παράδειγμα 7

Να δείξετε ότι οι μόνες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τη σχέση:

$$f'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

είναι η $f(x) = \lambda e^x$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Πράγματι, από τις παραγώγους βασικών συναρτήσεων εύκολα βρίσκουμε ότι η λe^x ικανοποιεί την παραπάνω σχέση, αφού:

$$(\lambda e^x)' = \lambda(e^x)' = \lambda e^x.$$

Μένει να δείξουμε ότι αυτή είναι και η μοναδική. Θεωρούμε τη συνάρτηση⁷:

$$g(x) = e^{-x} f(x), x \in \mathbb{R}$$

Τότε, παρατηρούμε ότι αυτή ικανοποιεί το εξής:

$$g'(x) = (e^{-x})' f(x) + e^{-x} f'(x) = -e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x) = e^{-x} (f'(x) - f(x)).$$

⁷Το τέχνασμα που κάναμε εδώ, να πολλαπλασιάσουμε με την e^{-x} , θα το δούμε σε λίγο γενικότερο επίπεδο σε επόμενο κεφάλαιο, όπου θα βρίσκουμε σε ποιο περίπλοκες περιπτώσεις τον τύπο μιας συνάρτησης μέσα από μία σχέση που εμπλέκει την ίδια τη συνάρτηση και την παράγωγό της.

Όμως,

$$f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 0,$$

άρα:

$$g'(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

επομένως, υπάρχει ένας σταθερός αριθμός $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε:

$$g(x) = c, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Αυτό όμως σημαίνει ότι:

$$e^{-x}f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = ce^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Άρα, κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x) = f(x),$$

είναι της μορφής:

$$f(x) = \lambda e^x,$$

για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 8

Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση που ικανοποιεί τα παρακάτω:

- $f(x+y) = f(x)f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$,

τότε η f έχει τύπο:

$$f(x) = e^x.$$

Όπως έχουμε δει και σε άλλες ασκήσεις, είναι ιδιαίτερα χρήσιμο να υπολογίσουμε το $f(0)$. Θέτουμε $x = y = 0$, οπότε:

$$f(0+0) = f(0)f(0) \Leftrightarrow f(0) = (f(0))^2 \Leftrightarrow f(0) = 0 \text{ ή } f(0) = 1.$$

Αν, τώρα, $f(0) = 0$, τότε θα είχαμε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θέτοντας $y = 0$ στην παραπάνω σχέση:

$$f(x+0) = f(x)f(0) \Leftrightarrow f(x) = 0,$$

επομένως, η f θα ήταν παραγωγίσιμη σε όλο το \mathbb{R} , ως σταθερή, και μάλιστα:

$$f'(x) = (0)' = 0,$$

πράγμα που σημαίνει ότι:

$$f'(0) = 0 \neq 1,$$

άτοπο, άρα $f(0) = 1$.

Σαν επόμενο βήμα μας, θα δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της και θα βρούμε την παράγωγό της. Έστω, λοιπόν, $x \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} &\stackrel{h=y-x}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)(f(h) - 1)}{h} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{f(h) - 1}{h}.$$

Εδώ, όμως, παρατηρούμε ότι, από την παραγωγισιμότητα της f στο 0, παίρνουμε ότι:

$$1 = f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h},$$

οπότε:

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{f(h) - 1}{h} = f(x) \cdot 1 = f(x).$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα:

$$f'(x) = f(x),$$

επομένως, από το προηγούμενο παράδειγμα, έπεται ότι η f είναι της μορφής:

$$f(x) = \lambda e^x,$$

για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$. Αφού, όμως, $f(0) = 1$, έπεται ότι:

$$f(0) = \lambda e^0 \Leftrightarrow 1 = \lambda,$$

οπότε:

$$f(x) = e^x,$$

που ήταν το ζητούμενο.

4.2 Μονοτονία συνάρτησης

Επιτέλους, φτάσαμε σε μια από τις πιο κρίσιμες και χρήσιμες συνέπειες του θεωρήματος μέσης τιμής: αυτή που συνδέει την παράγωγο μιας συνάρτησης με τη μονοτονία της. Πριν παραθέσουμε τα δύο σχετικά θεωρήματα, ας πάρουμε λίγο μια διαισθητική ιδέα για την απόδειξή τους. Ας πάρουμε μία συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) , με θετική παράγωγο, δηλαδή:

$$f'(x) > 0.$$

Όπως είπαμε, η παράγωγος εκφράζει την κλίση της εφαπτομένης σε κάθε σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης και είναι ορισμένη ως το ακόλυθο όριο:

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

το οποίο εκφράζει το όριο των κλίσεων των τεμνουσών της γραφικής παράστασης της f που διέρχονται από το $(x, f(x))$ και από ένα άλλο σημείο $(y, f(y))$, για y κοντά στο x . Αφού $f'(x) > 0$, δηλαδή το όριο:

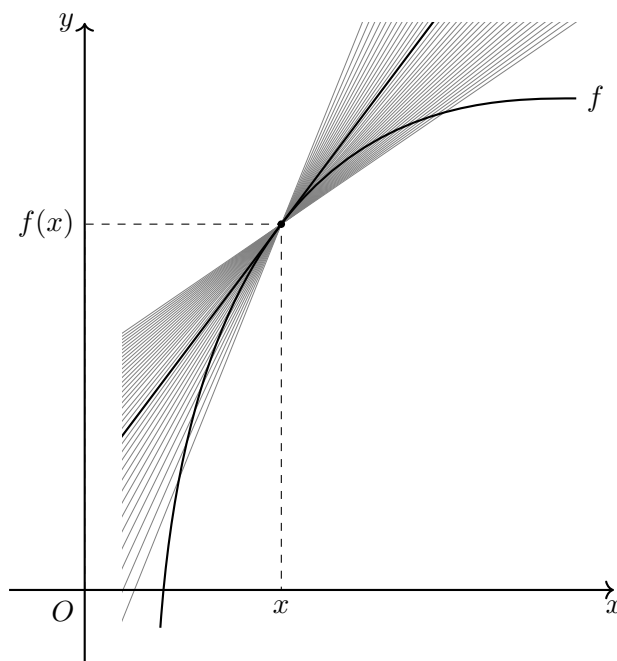
$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0,$$

έπεται, όπως γνωρίζουμε, ότι για y κοντά στο x θα ισχύει:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0,$$

δηλαδή, οι τέμνουσες εκεί κοντά έχουν όλες θετική κλίση, άρα είναι ευθείες «ανοδικές» καθώς κοιτάμε από αριστερά προς τα δεξιά, άρα, και η γραφική παράσταση της συνάρτησης εκεί κοντά θα ανεβαίνει. Η ιδέα αυτή αποτυπώνεται και στο σχήμα 4.2.

Για να το διατυπώσουμε όλο αυτό τυπικά, θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα μέσης τιμής.



Σχήμα 4.2: Παράγωγος και μονοτονία.

Θεώρημα 5 (Σχέση μονοτονίας-παραγώγου)

Έστω $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτησης, όπου Δ διάστημα και έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Τότε:

1. αν η $f'(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , ενώ,
2. αν η $f'(x) < 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ τότε η f είναι γνησίως φθινουσα στο Δ .

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε την πρώτη περίπτωση, μιας και η δεύτερη είναι ανάλογη⁸. Έστω, λοιπόν ότι:

$$f'(x) > 0, \text{ για κάθε } x \text{ στο εσωτερικό του } \Delta.$$

Έστω, επίσης, $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Τότε, η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, αφού είναι συνεχής στο Δ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , αφού το (x_1, x_2) περιέχεται στο εσωτερικό του Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ . Επομένως, η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[x_1, x_2]$, άρα υπάρχει ένα $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Όμως, το $x_0 \in (x_1, x_2)$, άρα, είναι εσωτερικό σημείο του Δ , άρα ισχύει:

$$f'(x_0) > 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0,$$

και, αφού $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_2 - x_1 > 0$, έπεται ότι:

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Ας δούμε τώρα κι ένα παράδειγμα εφαρμογής του παραπάνω θεωρήματος.

⁸Όντως, μόνο οι φορές στις ανισότητες αλλάζουν.

Παράδειγμα 9

Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{2x^2 - x}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, επομένως:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x^2 - x)'(x^2 + 1) - (x^2 + 1)'(2x^2 - x)}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{(4x - 1)(x^2 + 1) - 2x(2x^2 - x)}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{4x^3 - x^2 + 4x - 1 - 4x^3 + 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{x^2 + 4x - 1}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Τώρα, πρέπει να μελετήσουμε την f' ως προς το πρόσημο, οπότε κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της f' . Για την ακρίβεια, δεδομένου ότι:

$$(x^2 + 1)^2 > 0,$$

μπορούμε να ασχοληθούμε μόνο με τον αριθμητή:

$$x^2 + 4x - 1.$$

Επιλύουμε την εξίσωση:

$$x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} - 2 \text{ ή } x = -\sqrt{2} - 2,$$




και κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της f' :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}-2$	$\sqrt{2}-2$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Με βάση τον παραπάνω πίνακα και το προηγούμενο θεώρημα, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

- η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα⁹ $(-\infty, -\sqrt{2} - 2]$ και $[\sqrt{2} - 2, +\infty)$ και
- η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-\sqrt{2} - 2, \sqrt{2} - 2]$.

Τα παραπάνω μπορούμε να τα συνοψίσουμε στον πίνακα 4.1.

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}-2$	$\sqrt{2}-2$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

Πίνακας 4.1: Ο πίνακας μονοτονίας της f .

⁹Προφανώς, δεν είναι και στην ένωσή τους.

Παρατήρηση 6

Να παρατηρήσουμε εδώ ότι το αντίστροφο δεν ισχύει: δηλαδή, αν μία συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του τότε δεν έχει παράγωγο κατ' ανάγκη θετική. Για παράδειγμα, θεωρήστε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x^3 + 1,$$

η οποία είναι γνησίως αύξουσα, αλλά:

$$f'(x) = 3x^2,$$

και η οποία μηδενίζεται στο 0. Μπορούμε όμως να πούμε με σιγουριά ότι, αν μία συνάρτηση είναι (γνησίως) αύξουσα (αντίστοιχα, φθίνουσα) σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της και παραγωγίσιμη σε αυτό, τότε $f'(x) \geq 0$ (αντίστοιχα, $f'(x) < 0$). Πράγματι, αφού η f είναι (γνησίως) αύξουσα, τότε ο λόγος:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0,$$

για κάθε $y \neq x$, επομένως, παίρνοντας όριο καθώς $y \rightarrow x$, έχουμε:

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0.$$

4.3 Τοπικά ακρότατα συνάρτησης

Είμαστε, επιτέλους, σε θέση να διατυπώσουμε κάποια πολύ χρήσιμα θεωρήματα σε σχέση με τα τοπικά ακρότατα παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Η ιδέα πίσω από όλα τα θεωρήματα είναι, κατά βάση, η ίδια: η πιο χαρακτηριστική περίπτωση μία συνάρτηση να παρουσιάσει τοπικό μέγιστο (αντίστοιχα, ελάχιστο) σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι η συνάρτηση να είναι αύξουσα «λίγο πριν» το x_0 (ντίστοιχα, φθίνουσα) και φθίνουσα «λίγο μετά» το x_0 (αντίστοιχα, αύξουσα). Έχουμε, έτσι, το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 6 (Σχέση παραγώγου και τοπικών ακροτάτων)

Αν $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση και $x_0 \in (a, b)$ είναι ένα σημείο στο οποίο η f είναι (τουλάχιστον) συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ τότε:

1. αν $f'(x) < 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, b) , τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0 ,
2. αν $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, b) , τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 ,
3. αν $f'(x) > 0$ στο $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ ή $f'(x) < 0$ στο $(a, x_0) \cup (x_0, b)$, τότε η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι γνησίως μονότονη στο (a, b) .

Απόδειξη 1. Αφού $f'(x) < 0$ στο (a, x_0) , η f είναι γνησίως φθίνουσα στο¹⁰ $(a, x_0]$, επομένως, για κάθε $x \in (a, x_0]$ ισχύει ότι:

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Ανάλογα, αφού $f'(x) > 0$ στο (x_0, b) , η f είναι γνησίως αύξουσα στο¹¹ $[x_0, b)$, επομένως, για κάθε $x \in [x_0, b)$ ισχύει ότι:

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Τελικά, για κάθε $x \in (a, b)$ ισχύει ότι:

$$f(x) \leq f(x_0),$$

επομένως η f παρουσιάζει (τοπικό) ελάχιστο στο x_0 .

¹⁰ Δεν πήραμε το $[a, x_0]$, γιατί δεν ξέρουμε αν η f είναι ορισμένη στο a .

¹¹ Κι εδώ, δεν πήραμε το $[x_0, b]$, γιατί δεν ξέρουμε αν η f είναι ορισμένη στο b .

2. Η απόδειξη είναι ανάλογη με την προηγούμενη.

3. Ας υποθέσουμε ότι $f'(x) > 0$ στο $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ (η απόδειξη της άλλης περίπτωσης είναι ανάλογη). Τότε, θα δείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a, b) . Αφού $f'(x) > 0$ στα διαστήματα (a, x_0) και (x_0, b) , έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(a, x_0]$ και $[x_0, b)$. Έστω τώρα $x_1, x_2 \in (a, b)$ με $x_1 < x_2$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- αν $x_1, x_2 \in (a, x_0]$ τότε, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό το διάστημα, έπεται ότι:

$$f(x_1) < f(x_2),$$

- αν $x_1, x_2 \in [x_0, b)$ τότε, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό το διάστημα, έπεται ότι:

$$f(x_1) < f(x_2),$$

- αν $x_1 \in (a, x_0]$ και¹² $x_2 \in (x_0, b)$ τότε, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα δύο διαστήματα, έπεται ότι:

$$f(x_1) \leq f(x_0) < f(x_2),$$

δηλαδή:

$$f(x_1) < f(x_2),$$

άρα, σε κάθε περίπτωση:

$$f(x_1) < f(x_2),$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε δεν παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 .

Παρατήρηση 7

Η τρίτη περίπτωση του παραπάνω θεωρήματος μας λέει ότι, ακόμα κι αν το x_0 είναι ρίζα της f' , αν η f' διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 , η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 .

Ας παρατηρήσουμε ότι το παραπάνω θεώρημα μας δίνει ένα σύνολο *αναγκαίων συνθηκών*, οι οποίες μας εξασφαλίζουν την ύπαρξη (τοπικών) ακροτάτων. Με άλλα λόγια, η ισχύς αυτών των συνθηκών για ένα σημείο έχει σαν αποτέλεσμα η συνάρτησή μας να παρουσιάζει (τοπικό) ακρότατο σε αυτό το σημείο.

Ας δούμε κι ένα παράδειγμα για να καταλάβουμε πώς ακριβώς μας βοηθά το παραπάνω θεώρημα.

Παράδειγμα 10

Να βρείτε τα ακρότατα¹³ της συνάρτησης:

$$f(x) = 4x^5 + x^4 - 8x^3 + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το \mathbb{R} , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, έχουμε:

$$f'(x) = 20x^4 + 4x^3 - 24x^2 = 4x^2(5x^2 + x - 6).$$

Λύνουμε τώρα την εξίσωση:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 4x^2(5x^2 + x - 6) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x^2 = 0 \text{ ή } 5x^2 + x - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -\frac{6}{5}, \end{aligned}$$

¹² Αν $x_2 = x_0$ τότε είμαστε στην πρώτη περίπτωση.

¹³ «Πακέτο» με αυτά θα βρούμε και τη μονοτονία.

οπότε, τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα $-6/5, 0$ και 1 . Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της f' :

x	$-\infty$	$-6/5$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Με βάση αυτόν και το προηγούμενο θεώρημα βλέπουμε ότι η f :

- έχει τοπικό μέγιστο στο $-6/5$, το $f(-6/5)$,
- έχει τοπικό ελάχιστο στο 1 , το $f(1)$.

Για να εξετάσουμε αν αυτά είναι ολικά, υπολογίζουμε τα όρια:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^5 + x^4 - 8x^3 + 1) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 \left(4 + \frac{1}{x} - \frac{8}{x^2} + \frac{1}{x^5} \right) = \\ &= +\infty(4 + 0 - 0 + 0) = \\ &= +\infty.\end{aligned}$$

Ανάλογα:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^5 + x^4 - 8x^3 + 1) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \left(4 + \frac{1}{x} - \frac{8}{x^2} + \frac{1}{x^5} \right) = \\ &= -\infty(4 + 0 - 0 + 0) = \\ &= -\infty,\end{aligned}$$

επομένως, όλα τα ακρότατα της f είναι (μόνο) τοπικά. Συνοψίζουμε τα παραπάνω αποτελέσματα στον πίνακα 4.2.

x	$-\infty$	$-6/5$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		\nearrow	T. $\mu\epsilon\gamma$.	\searrow	T. $\epsilon\lambda\alpha\chi$.	\nearrow

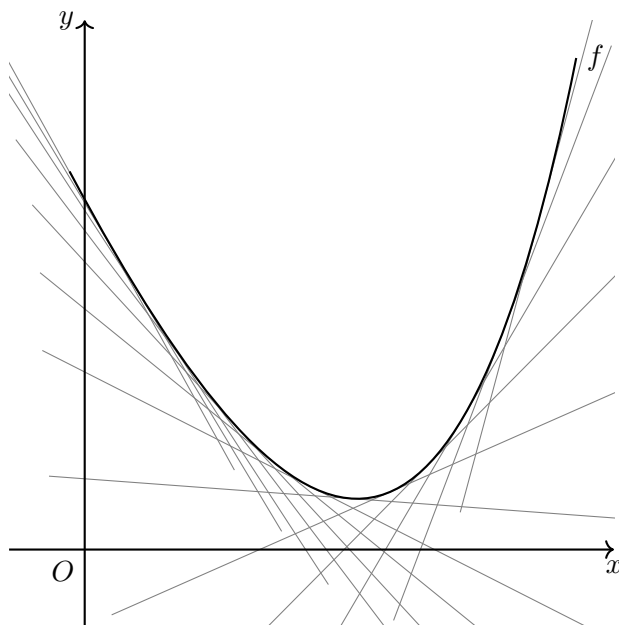
Πίνακας 4.2: Ο πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων της f .

Κεφάλαιο 5

Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις

5.1 Ορισμός κυρτών και κοίλων συναρτήσεων

Έχουμε μελετήσει, ως τώρα, αναλυτικά, τη μονοτονία των συναρτήσεων. Τι πληροφορίες, όμως, μπορεί να μας δώσει η μονοτονία της παραγώγου μιας συνάρτησης για την ίδια τη συνάρτηση; Ας σκεφτούμε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει παράγωγο που είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το \mathbb{R} . Αυτό, σημαίνει ότι η κλίση της εφαπτομένης της f σε κάθε σημείο της, καθώς προχωράμε προς τα δεξιά, αυξάνεται, δηλαδή οι εφαπτόμενες της γίνονται πιο «απότομες», αν μιλάμε για θετικές κλίσεις και πιο «ομαλές», αν μιλάμε για αρνητικές κλίσεις. Αυτό, έχει σαν αποτέλεσμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης να έχει ένα σχήμα που θυμίζει ένα «μπωλ», τοποθετημένο πάνω σε ένα τραπέζι, όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.1.



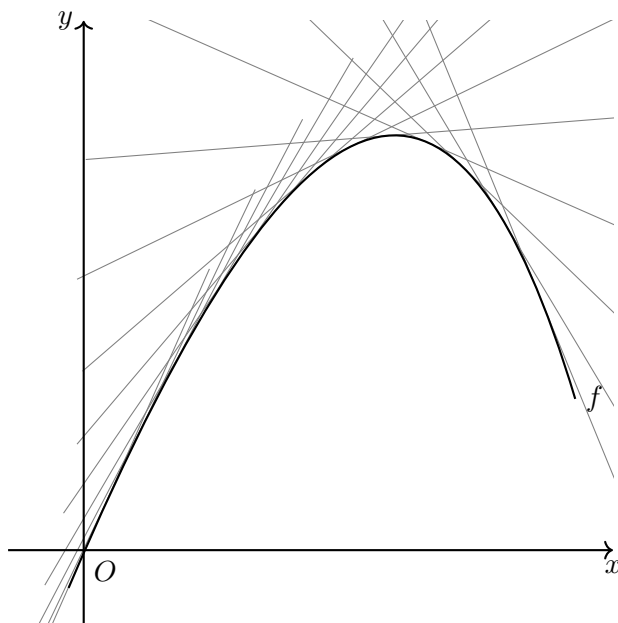
Σχήμα 5.1: Μία κυρτή συνάρτηση.

Αντίστοιχα, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα, τότε η γραφική παράσταση της f μοιάζει με ένα «μπωλ» αναποδογυρισμένο, όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.2

Η παραπάνω ιδέα μας δίνουν αφορμή για τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός 10 (Κυρτή συνάρτηση)

Αν $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση και Δ ένα διάστημα, τότε η f λέγεται κυρτή ή



Σχήμα 5.2: Μία κοίλη συνάρτηση.

ότι στρέφει τα κοίλα προς τα άνω αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Ορισμός 11 (Κοίλη συνάρτηση)

Αν $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση και Δ ένα διάστημα, τότε η f λέγεται κοίλη ή ότι στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

Άμεσα, από όσα είπαμε για την μονοτονία παραγωγίσιμων συναρτήσεων έχουμε τια δύο ακόλουθα πορίσματα, των οποίων η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

Πόρισμα 6

Αν $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση, Δ διάστημα και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ , με $f''(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ τότε η f είναι κυρτή.

Πόρισμα 7

Αν $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση, Δ διάστημα και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ , με $f''(x) < 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ τότε η f είναι κοίλη.

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 11

Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα τη συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο της f , αφού αυτή είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων:

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}(-x)'}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

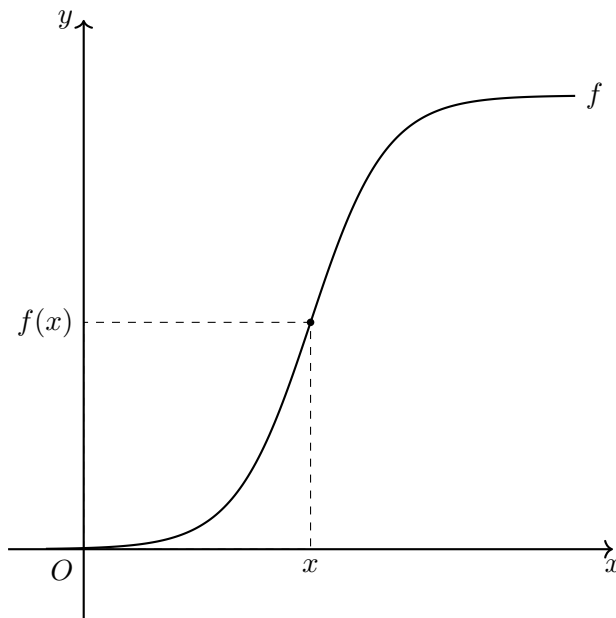
Παρατηρούμε ότι η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, επομένως, υπολογίζουμε και τη δεύτερη παράγωγο της f :

$$f''(x) = \frac{e^x - e^{-x}(-x)'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Εφ' όσον $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από τα προηγούμενα πορίσματα, έπεται ότι η f είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της.

5.2 Σημεία καμπής

Ιδιαίτερη σημασία έχουν τα σημεία στα οποία αλλάζει η κυρτότητα μίας συνάρτησης από κυρτή σε κοίλη. Αυτά τα σημεία τα ονομάζουμε *σημεία καμπής*, εμπνεόμενοι από τη μορφή που έχει μία συνάρτηση εκεί που θυμίζει μία συρμάτινη βέργα που «κάμπτεται»¹ όπως φαίνεται στο σχήμα 5.3.



Σχήμα 5.3: Ένα σημείο καμπής.

Ακολουθεί τώρα ο αυστηρός μαθηματικός ορισμός.

Ορισμός 12 (Σημείο καμπής)

Αν $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη στο $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ και:

- η f είναι κυρτή στο (a, x_0) και κοίλη στο (x_0, b) ή αντίστροφα και,
- υπάρχει η εφαπτομένη² της f στο x_0 ,

τότε το σημείο $P(x_0, f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής της f .

Από τον παραπάνω ορισμό και τα θεωρήματα για την μονοτονία συναρτήσεων έπεται άμεσα το ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 8

Αν $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(a, x_0) \cup (x_0, b)$, συνεχής στο x_0 και:

- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και,
- υπάρχει η εφαπτομένη της f στο x_0 ,

τότε το σημείο $P(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της f .

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα για τα σημεία καμπής συναρτήσεων που είναι δύο φορές παραγωγίσιμες είναι η ακόλουθη πρόταση:

¹Πράγματι, αν δοκιμάσετε να πάρετε μία λεπτή συρμάτινη ή μεταλλική, εν γένει, βέργα και τη λυγίσετε ελαφρώς αυτή θα πάρει μορφή σαν αυτή που φαίνεται στο σχήμα 5.3

²Μα, καλά, αν υπάρχει η εφαπτομένη τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ; Όσοι προσέχατε όταν διαβάζατε θα θυμόσαστε ότι υπάρχουν και οι κατακόρυφες εφαπτόμενες, για τις οποίες γνωρίζουμε ότι η παράγωγος δεν υπάρχει, μιας και οι πλευρικές παράγωγοι απειρίζονται αμφότερες.

Πρόταση 13

Αν $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση, το σημείο $P(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε:

$$f''(x_0) = 0.$$

Απόδειξη

Αφού το x_0 είναι σημείο καμπής της f , έπεται ότι η f αλλάζει κυρτότητα εκατέρωθεν του x_0 , επομένως, είτε είναι κυρτή αριστερά του x_0 και κοίλη δεξιά του είτε το αντίστροφο. Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι ισχύει το πρώτο. Τότε, η f' θα είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα $(x_0 - \delta_1, x_0]$, για κάποιον αριθμό $\delta_1 > 0$ και γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα $[x_0, x_0 + \delta_2)$, για κάποιον αριθμό $\delta_2 > 0$ επομένως, θα ισχύει ότι:

$$f'(x) \leq f'(x_0), \quad \forall x \in (a, x_0],$$

και:

$$f'(x) \leq f'(x_0), \quad \forall x \in [x_0, b).$$

Αν επιλέξουμε για $\delta > 0$ να είναι ο μικρότερος από τους αριθμούς⁴ δ_1 και δ_2 , τότε έπεται ότι ισχύει η σχέση:

$$f'(x) \leq f'(x_0), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Με άλλα λόγια, η f' παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο και, αφού η f' είναι παραγωγίσιμη σε αυτό το σημείο και το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του (a, b) , έπεται, από το θεώρημα του Fermat, ότι η $f''(x)$ θα μηδενίζεται σε εκείνο το σημείο, δηλαδή:

$$f''(x_0) = 0,$$

που ήταν και το ζητούμενο.

Επομένως, αν μία συνάρτηση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη έχει νόημα να αναζητούμε τα σημεία καμπής της:

- είτε στα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της στα οποία η f'' μηδενίζεται είτε,
- στα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της στα οποία η f'' δεν υπάρχει⁵.

Ας δούμε και ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 12

Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής την παρακάτω συνάρτηση:

$$f(x) = xe^{x-1}.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το \mathbb{R} ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε:

$$f'(x) = (x)'e^{x-1} + x(e^{x-1})' = e^{x-1} + xe^{x-1} = (x+1)e^{x-1}.$$

Αφού η f' είναι κι αυτή παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, έχουμε:

$$f''(x) = (x+1)'e^{x-1} + (x+1)(e^{x-1})' = e^{x-1} + (x+1)e^{x-1} = (x+2)e^{x-1}.$$

Τώρα, λύνουμε την εξίσωση:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)e^{x-1} = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \text{ ή } e^{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

³ Δεν παίρνουμε ως άκρα τα a, b γιατί μπορεί η f να ξανααλλάζει κυρτότητα σε κάποιο άλλο σημείο του (a, b) .

⁴ Θυμηθείτε, όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος του Fermat, το παράδειγμα με το τζάκι.

⁵ Προφανώς, αφού θέλουμε να αλλάξει η κυρτότητα της f εκατέρωθεν του x_0 , δεν έχει νόημα να αναζητούμε σημεία καμπής σε σημεία που δεν είναι εσωτερικά.

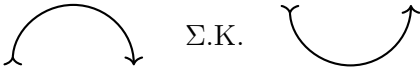
Κατασκευάσουμε τον πίνακα προσήμου της δεύτερης παραγώγου της f :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

Από τον παραπάνω πίνακα και το προηγούμενο θεώρημα εύκολα συμπεραίνουμε ότι:

- η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, -2]$,
- η f είναι κυρτή στο διάστημα $[-2, +\infty)$ και,
- παρουσιάζει σημείο καμπής στο σημείο $P(2, f(2))$, δηλαδή στο $P(2, 4e)$.

Τα παραπάνω μπορούν να συνοψιστούν και στον πίνακα 5.1.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

Πίνακας 5.1: Ο πίνακας κυρτότητας της f .

5.3 Σχέση μεταξύ κυρτότητα και εφαπτομένης

Αν ξαναρίξουμε μια ματιά στα σχήματα 5.1 και 5.2 θα παρατηρήσουμε κάτι αρκετά ενδιαφέρον: στην περίπτωση του σχήματος 5.1, όπου η συνάρτηση που απεικονίζεται είναι κυρτή, οι εφαπτόμενες της γραφικής της παράστασης φαίνεται να είναι όλες «κάτω» από αυτή, ενώ, αντιθέτως, στο σχήμα 5.2, όπου η συνάρτηση είναι κοίλη, οι εφαπτόμενες φαίνονται να είναι όλες «πάνω» από αυτή. Το ζήτημα είναι, ισχύει πάντα αυτό; Ας σκεφτούμε λίγο πιο διαισθητικά, για αρχή. Αν μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι, ας πούμε, κυρτή, τότε η παράγωγός της είναι γνησίως αύξουσα. Ας πάρουμε και την εξίσωση της εφαπτομένης της σε ένα σημείο $P(x_0, f(x_0))$ του πεδίου ορισμού της:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Για να είναι η γραφική παράσταση της f πάνω από την εφαπτομένη της πρέπει να ισχύει η ανισότητα:

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \quad \forall x \in A.$$

Ας «παίζουμε» λίγο με αυτήν την ανισότητα:

$$f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0).$$

Τώρα, θα ήταν ωραίο να μπορούσαμε να διαιράσουμε με $x - x_0$ έτσι ώστε να εμφανιστεί ο λόγος μεταβολής:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Αλλά, πού ξέρουμε αν το $x - x_0$ είναι θετικό ή αρνητικό; Ας πάρουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $x > x_0$ τότε μπορούμε να διαιράσουμε στην παραπάνω ανισότητα χωρίς να αλλάξει η φορά, οπότε:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0).$$

Αυτό τώρα, τι μας θυμίζει; Αν από αριστερά πάρουμε όριο καθώς $x \rightarrow x_0^+$, θα πάρουμε την παράγωγο της f στο x_0 , αλλά αυτό δε μας λέει κάτι, γιατί το ίδιο έχουμε και στο δεξί μέλος. Ας κάνουμε όμως ένα άλλο τέχνασμα. Αν το x και το x_0 , είναι αρκετά κοντά, τότε η παράσταση:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

είναι πολύ κοντά στο $f'(x_0)$, ή, αν το δούμε «με άλλο μάτι», είναι πολύ κοντά και στο $f'(x)$. Δηλαδή:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx f'(x).$$

Όμως, αφού $x > x_0$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα, θα ισχύει:

$$f'(x) > f'(x_0),$$

δηλαδή,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx f'(x) > f'(x_0),$$

που είναι η ανισότητα που θέλαμε.

- Αν, τώρα, $x < x_0$ τότε μπορούμε να διαιράσουμε στην παραπάνω ανισότητα και να αλλάξει η φορά, οπότε:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0).$$

Όπως και πριν, αν το x και το x_0 , είναι αρκετά κοντά, τότε η παράσταση:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

είναι πολύ κοντά στο $f'(x_0)$, ή, αν το δούμε και πάλι «με άλλο μάτι», είναι πολύ κοντά και στο $f'(x)$. Δηλαδή:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx f'(x).$$

Όμως, αφού $x < x_0$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα, θα ισχύει:

$$f'(x) < f'(x_0),$$

δηλαδή,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx f'(x) < f'(x_0),$$

που είναι η ανισότητα που θέλαμε και πάλι.

Ας δούμε τώρα και πώς θα γράψουμε όλες τις παραπάνω ιδέες στα μαθηματικένια.

Πρόταση 14

Αν $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση και $x_0 \in (a, b)$ τότε:

1. αν η f είναι κυρτή, τότε:

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \quad \forall x \in (a, b).$$

2. αν η f είναι κοίλη, τότε:

$$f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \quad \forall x \in (a, b).$$

Μάλιστα, σε κάθε περίπτωση, η ισότητα ισχύει μόνο για $x = x_0$.

Απόδειξη

Μαντέψτε! Θα αποδείξουμε μόνο τη μία περίπτωση γιατί η άλλη είναι εντελώς ανάλογη. Έστω, λοιπόν, ότι η f είναι κοίλη, επομένως η f' είναι γνησίως φθίνουσα και πρέπει να αποδείξουμε την ανισότητα:

$$f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

ή, ισοδύναμα, την ανισότητα:

$$f(x) - f(x_0) \leq f'(x_0)(x - x_0).$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $x > x_0$, τότε $x - x_0 > 0$, οπότε η προς απόδειξη ανισότητα γράφεται ως εξής:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0).$$

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) , έπεται ότι είναι και συνεχής σε αυτό, άρα και στο $[x_0, x]$, αφού $[x_0, x] \subseteq (a, b)$. Επίσης, η f είναι και παραγωγίσιμη στο (x_0, x) , άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής⁶ στο $[x_0, x]$, επομένως υπάρχει ένα $\xi \in (x_0, x)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Τώρα, αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα και $\xi > x_0$, έπεται ότι:

$$f'(\xi) < f'(x_0),$$

δηλαδή:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < f'(x_0),$$

που ήταν το ζητούμενο.

- Αν $x < x_0$, τότε $x - x_0 < 0$, οπότε η προς απόδειξη ανισότητα γράφεται ως εξής:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0).$$

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) , έπεται ότι είναι και συνεχής σε αυτό, άρα και στο $[x, x_0]$, αφού $[x, x_0] \subseteq (a, b)$. Επίσης, η f είναι και παραγωγίσιμη στο (x, x_0) , άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[x, x_0]$, επομένως υπάρχει ένα $\xi \in (x, x_0)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Τώρα, αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα και $\xi < x_0$, έπεται ότι:

$$f'(\xi) > f'(x_0),$$

δηλαδή:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > f'(x_0),$$

που ήταν το ζητούμενο.

- Αν $x = x_0$, τότε η ανισότητα ισχύει προφανώς, ως ισότητα, αφού:

$$f(x_0) - f(x_0) \leq f'(x_0)(x_0 - x_0) \Leftrightarrow 0 \leq 0.$$

⁶ Αμάν, πια, με αυτό το θεώρημα μέσης τιμής! Από όταν το είδαμε, όλο συνέπειές του βλέπουμε!

Άρα, σε κάθε περίπτωση, ισχύει η ζητούμενη ανισότητα και, μάλιστα, ισχύει ως ισότητα μόνον όταν $x = x_0$.

Την παραπάνω πρόταση μπορούμε να τη χρησιμοποιούμε για να αποδείξουμε διάφορες ανισότητες.

Παράδειγμα 13

Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$2e^x \geq 1 + 2(e-1)x + x^2, \quad x > 0.$$

Ας πάρουμε τη ζητούμενη ανισότητα και ας τη γράψουμε λίγο διαφορετικά, αφήνοντας στο ένα μέρος της μία ευθεία:

$$2e^x - x^2 \geq 1 + 2(e-1)x.$$

Τώρα, αρκεί να δείξουμε ότι η $f(x) = 2e^x - x^2$, $x > 0$ βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = 1 + 2(e-1)x$, οπότε θα μας άρεσε πολύ η f να είναι κυρτή και η $y = 1 + 2(e-1)x$ να είναι η εφαπτομένη της σε ένα σημείο της. Για να δούμε. Η f είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων και μάλιστα:

$$f'(x) = 2e^x - 2x.$$

Η f' , με τη σειρά της, είναι κι αυτή παραγωγίσιμη, ως πράξεις παραγωγίσιμων, και μάλιστα:

$$f''(x) = 2e^x - 2 = 2(e^x - 1).$$


Επιλύουμε την εξίσωση:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln 1 = 0,$$

και κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της f'' :

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	0	+

Με βάση αυτόν τον πίνακα η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$, όπως θέλαμε και φαίνεται και στον πίνακα 5.2.

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	0	+
$f(x)$		

Πίνακας 5.2: Ο πίνακας κυρτότητας της $f(x) = 2e^x - x^2$.

Με λίγη τύχη και πειραματισμό, μας έρχεται να φάξουμε την εφαπτομένη της f στο $P(1, f(1))$, οπότε, ευτυχώς, βρίσκουμε ότι:

$$f(1) = 2e - 1 \text{ και } f'(1) = 2e - 2.$$

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο $P(1, f(1))$ είναι η:

$$y = (2e - 2)(x - 1) + 2e - 1 \Leftrightarrow y = 2(e - 1)x - 2e + 2 + 2e - 1 \Leftrightarrow y = 2(e - 1)x + 1.$$

Επομένως, αφού η f είναι κυρτή, έπεται ότι:

$$f(x) \geq 2(e - 1)x + 1 \Leftrightarrow 2e^x - x^2 \geq 2(e - 1)x + 1.$$

Κεφάλαιο 6

Οι κανόνες de l'Hospital

Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε λίγο με ένα κύριο ο οποίος έχει πάρει, σε μεγάλο βαθμό χάρη σε αυτούς τους κανόνες που φέρουν το όνομά του και που, πιθανότατα, θα έχει τύχει να ακούσεται να αναφέρονται σαν «πασπαρτού» για όλα τα όρια¹. Αρχικά, ας πούμε πού χρησιμεύουν αυτοί οι κανόνες. Συνήθως του χρησιμοποιούμε για όρια που βρίσκονται σε κάποια από τις παρακάτω απροσδιόριστες μορφές:

$$\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty},$$

ή σε όποιο όριο μπορεί να καταλήξει σε αυτές τις μορφές, και αφορά παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Η ιδέα, πίσω από τους κανόνες είναι αρκετά απλή. Ας πάρουμε, για παράδειγμα, τον κανόνα που αφορά την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Έστω, λοιπόν, ότι έχουμε δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ για ένα $x_0 \in (a, b)$ έτσι ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0,$$

πράγμα που έχει σαν αποτέλεσμα το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

να είναι της μορφής $\frac{0}{0}$. Ας κάνουμε τώρα την εξής παρατήρηση για το πηλίκο $\frac{f}{g}$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} \approx \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)},$$

καθώς το $x \rightarrow x_0$. Αυτή η ιδέα βασίστηκε στο ότι $f(x_0) = g(x_0) = 0$, μιας και οι f, g , ως παραγωγίσιμες, είναι και συνεχείς στο x_0 , επομένως:

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ και } g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

Βέβαια, το παραπάνω δεν αποτελεί, για κανέναν λόγο απόδειξη της ισχύος του κανόνα, μιας και λείπει, σε μεγάλο βαθμό², αλλά μας δίνει μία ισχυρή ένδειξη για το ότι, μάλλον, ισχύει.

Για την μορφή $\frac{\infty}{\infty}$, μπορείτε να σκεφτείτε το εξής: αν πάρουμε μία ποσότητα:

$$\frac{f(x)}{g(x)},$$

¹ Προφανώς, δεν είναι έτσι.

² Για παράδειγμα, ο κανόνας στην αυστηρή διατύπωσή του, δεν μας υποχρεώνει να είναι οι δύο συναρτήσεις ορισμένες στο x_0 .

όπου, και οι δύο συναρτήσεις, f, g , απειρίζονται καθώς προσεγγίζουμε κάποιο $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, δηλαδή:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty,$$

τότε, αν τις διαιρέσουμε, αυτό που μετράμε είναι το ποια από τις δύο συναρτήσεις, καθώς πλησιάζουμε στο x_0 , κινείται «ταχύτερα» προς το άπειρο. Γιατί, λοιπόν, να μη συγκρίνουμε απευθείας τις ταχύτητές τους και να δούμε από εκεί ποια κινείται πιο γρήγορα. Με άλλα λόγια, καθώς πλησιάζουμε στο x_0 , είτε συγκρίνουμε την ταχύτητα των δύο συναρτήσεων υπολογίζοντας το:

$$\frac{f(x)}{g(x)},$$

είτε υπολογίζοντας το:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα, μιας και, αυτή η συνάρτηση που απειρίζεται πιο γρήγορα, θα πρέπει να έχει και αναλόγως μεγαλύτερη ταχύτητα, δηλαδή, παράγωγο.

Αυτά όμως δεν είναι τόσο αυστηρά, οπότε, ας περάσουμε σε ένα πιο τυπικό επιχείρημα. Για λόγους απλότητας, θα ασχοληθούμε με την περίπτωση εκείνη στην οποία όλα τα όρια είναι πραγματικοί αριθμοί και οι f, g είναι και οι δύο ορισμένες στο x_0 και παραγωγίσιμες στο x_0 και απλώς θα διατυπώσουμε τους υπόλοιπους κανόνες.

Θεώρημα 7 (Κανόνας για τη μορφή $\frac{0}{0}$ με $x_0 \in \mathbb{R}$)

Αν $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις, $x_0 \in (a, b)$, $g'(x_0) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ κοντά στο x_0 και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0,$$

τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τις συναρτήσεις³:

$$\begin{aligned} a(h) &= f'(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ b(h) &= g'(x_0) - \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}, \end{aligned}$$

για h κοντά στο x_0 . Τότε, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + hf'(x_0) - ha(h) \\ g(x_0 + h) &= g(x_0) + hg'(x_0) - hb(h). \end{aligned}$$

Επίσης:

$$\lim_{h \rightarrow 0} a(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(f'(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

³Πώς μας ήρθε η ιδέα; Λοιπόν, η παράγωγος, όπως έχουμε πει κι άλλες φορές, προσεγγίζεται αρκετά καλά από την κλίση των τεμνουσών:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

για h κοντά στο 0. Έτσι, αφού το επιχείρημά μας στην παραπάνω συζήτηση «χάλαγε» σε εκείνο το σημείο που λέγαμε ότι ο λόγος αυτός είναι «περίπου» (\approx) η παράγωγος της f , πήραμε τη συνάρτηση a που, πρακτικά, αυτό που κάνει είναι να μετρά το πόσο «έξω» πέφτει ο παραπάνω λόγος σε σχέση με την $f'(x_0)$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} b(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(g'(x_0) - \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \right) = g'(x_0) - g'(x_0) = 0.$$

Παρατηρήστε, επίσης, πώς, λόγω της παραγωγισιμότητας των f, g στο x_0 , έπεται ότι αυτές είναι και συνεχείς και μάλιστα (όπως και στην παραπάνω συζήτηση):

$$f(x_0) = g(x_0) = 0.$$

Τώρα, κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής

$$h = x - x_0, \quad h \rightarrow 0,$$

το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) + hf'(x_0) - ha(h)}{g(x_0) + hg'(x_0) - hb(h)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hf'(x_0) - ha(h)}{hg'(x_0) - hb(h)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(f'(x_0) - a(h))}{h(g'(x_0) - b(h))} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f'(x_0) - a(h))}{(g'(x_0) - b(h))} = \\ &= \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}, \end{aligned}$$

που ήταν το ζητούμενο.

Οι πιο γενικές μορφές των κανόνων de l'Hospital είναι οι εξής:

Θεώρημα 8 (Μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις ορισμένες σε μία περιοχή του $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ με

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0,$$

και το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

υπάρχει, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Θεώρημα 9 (Μορφή $\frac{\infty}{\infty}$)

Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις ορισμένες σε μία περιοχή του $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ με

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty,$$

και το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

υπάρχει, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Παράδειγμα 14

Να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}.$$

Το εν λόγω όριο είναι της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$, και οι δύο συναρτήσεις $\ln x$ και x είναι παραγωγίσιμες σε όλο το $(0, +\infty)$. Επίσης, το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0,$$

υπάρχει, επομένως, από τον κανόνα de l'Hospital, υπάρχει και το ζητούμενο όριο και, μάλιστα:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Κεφάλαιο 7

Μελέτη και χάραξη γραφικής παράστασης συνάρτησης

Επιτέλους, φτάσαμε στο σημείο να έχουμε τα απαραίτητα εργαλεία έτσι ώστε να μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση οποιασδήποτε¹ συνάρτησης! Ήρθε, επιτέλους, η ώρα να περιγράψουμε μια γενική διαδικασία μελέτης και χάραξης γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων. Ξεκινάμε:

1. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
2. Βρίσκουμε, αν είναι εφικτό, τα σημεία τομής της f με τους άξονες, δηλαδή, υπολογίζουμε το $f(0)$ αν ορίζεται η f στο 0 και βρίσκουμε τις ρίζες της, αν υπάρχουν και είναι εφικτό να υπολογιστούν.
3. Μελετάμε τη συνάρτηση ως προς τη συνέχεια και, στη συνέχεια² ως προς το πρόσημο.
4. Μελετάμε τη συνάρτηση ως προς την παραγωγισιμότητα και την μελετούμε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας της.
5. Μελετάμε τη συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής, με όποιον τρόπο γίνεται (είτε μέσω της δεύτερης παραγώγου είτε αλλιώς) και κατασκευάζουμε τον πίνακα κυρτότητας της.
6. Βρίσκουμε τα όρια της συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού της.
7. Βρίσκουμε της ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, αν υπάρχουν.
8. Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών³ της συνάρτησης στον οποίο συνοψίζονται όλες οι παραπάνω πληροφορίες.
9. Με βάση τον πίνακα μεταβολών χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Ας δούμε κι ένα εκτενές παράδειγμα τώρα.

Παράδειγμα 15

Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2} e^x.$$

¹Ψέματα, ντροπή και αίσχος! Αρχικά, δε μπορούμε να σχεδιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις κάποιων συναρτήσεων. Έπειτα, η διαδικασία που θα περιγράψουμε αναφέρεται σε «καλές» συναρτήσεις, δηλαδή σε συναρτήσεις που είναι τουλάχιστον δύο φορές παραγωγίσιμες, έτσι ώστε να μελετήσουμε «άνετα» την κυρτότητά τους. Παρ' όλα αυτά, ακόμα και αυτές οι συναρτήσεις είναι, πράγματι, πάρα πολλές και, κυρίως τέτοιες θα μας απασχολήσουν στα πλαίσια της ύλης μας.

²No pun intended.

³Θα το δούμε στο επερχόμενο παράδειγμα πώς τον κατασκευάζουμε αυτόν τον πίνακα.

Ακολουθούμε αναλυτικά τα παραπάνω βήματα.

1. Το πεδίο ορισμού της f , δεδομένου ότι ο μόνος περιορισμός που έχουμε είναι ο:

$$x + 2 \neq 0,$$

είναι το:

$$D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty).$$

2. Τα σημεία τομής της f με τους άξονες είναι:

- με τον άξονα $y'y$, το σημείο $A(0, f(0))$, δηλαδή, αφού $f(0) = -\frac{1}{2}$, το:

$$A\left(0, -\frac{1}{2}\right),$$

- με τον άξονα $x'x$, τα σημεία που έχουν ως τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x + 2} e^x = 0 \xrightarrow[x^x > 0]{x \neq -2} x^2 - 1 = 0,$$

δηλαδή τα σημεία

$$B(-1, 0) \text{ και } C(1, 0).$$

3. Η f είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Επομένως, για να την μελετήσουμε ως προς το πρόσημο, αρκεί να επιλέξουμε τιμές στα διαστήματα $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 1)$ και $(1, +\infty)$ και να ελέγξουμε το πρόσημό τους. Επιλέγουμε:

$$-3 \in (-\infty, -2)$$

$$-\frac{3}{2} \in (-2, -1)$$

$$0 \in (-1, 1)$$

$$2 \in (1, +\infty)$$

και υπολογίζουμε:

$$f(-3) = -8e^{-3} < 0$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}e^{-3/2} > 0$$

$$f(0) = -\frac{1}{2} < 0$$

$$f(2) = \frac{3}{4}e^2 > 0,$$

οπότε, ο πίνακας προσήμου της f είναι ο:

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
$f(x)$	$+$	\parallel	$+$	$-$	$+$

4. Η f είναι, επίσης, παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και, μάλιστα:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{x + 2}\right)' e^x + \frac{x^2 - 1}{x + 2} (e^x)' =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(x^2 - 1)'(x + 2) - (x + 2)'(x^2 - 1)}{(x + 2)^2} e^x + \frac{x^2 - 1}{x + 2} e^x = \\
&= \left(\frac{2x(x + 2) - (x^2 - 1)}{(x + 2)^2} + \frac{x^2 - 1}{x + 2} \right) e^x = \\
&= \left(\frac{2x^2 + 4x - x^2 + 1}{(x + 2)^2} + \frac{x^2 - 1}{x + 2} \right) e^x = \\
&= \frac{x^2 + 4x + 1 + (x^2 - 1)(x + 2)}{(x + 2)^2} e^x = \\
&= \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{(x + 2)^2} e^x.
\end{aligned}$$

Τώρα, για να μελετήσουμε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα, πρέπει, για αρχή, να λύσουμε την εξίσωση:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{(x + 2)^2} e^x = 0 \xLeftrightarrow[x \neq -2]{e^x > 0} x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0.$$

Και πώς θα τη λύσουμε αυτή; Με Horner δε φαίνεται λύση στην ορίζοντα, οπότε τι μας μένει να κάνουμε; Παρατηρήστε πως στο αριστερό μέλος εμφανίζεται, σχεδόν, η ταυτότητα:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3.$$

Ε, θα της δώσουμε μια και θα την αποτελειώσουμε! Προσθέτουμε και αφαιρούμε μία μονάδα στο αριστερό μέλος της εξίσωσης⁴, οπότε:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^3 = 2 \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2} - 1$$

και μπορούμε τώρα να κάνουμε τον πίνακα προσήμου της f' . Δεδομένου ότι η f' είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, -2)$, $(-2, \sqrt[3]{2} - 1)$ και $(\sqrt[3]{2} - 1, +\infty)$ και δεν έχει ρίζα σε κανένα από αυτά, από τις συνέπειες του θεωρήματος του Bolzano, η f' θα διατηρεί πρόσημο σε καθένα από αυτά τα διαστήματα. Επομένως, αρκεί να ελέγξουμε μία τιμή της συνάρτησης σε καθένα από αυτά τα διαστήματα για να αποφανθούμε για το πρόσημό της. Επιλέγουμε, λοιπόν, τους εξής αριθμούς:

$$\begin{aligned}
-3 &\in (-\infty, -2) \\
0 &\in (-2, \sqrt[3]{2} - 1) \\
1 &\in (\sqrt[3]{2} - 1, +\infty)
\end{aligned}$$

και υπολογίζουμε:

$$f'(-3) = -10e^{-3} < 0, \quad f'(0) = -\frac{1}{4} < 0, \quad f'(1) = \frac{2e}{3} > 0,$$

επομένως, ο πίνακας προσήμου της f' είναι:

x	$-\infty$	-2	$\sqrt[3]{2} - 1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	\parallel	$-$	$+$

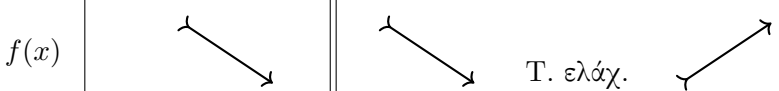
Από τον παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι:

⁴Για να κάνουμε και μια συζήτηση σχετικά με τις πολυωνυμικές εξισώσεις, για θυμηθείτε πώς βρήκαμε τον τύπο για τη δευτεροβάθμια εξίσωση με τη διακρίνουσα και τα συναφή: κάναμε συμπλήρωμα τετραγώνου. Με άλλα λόγια, προσπαθούσαμε να «χτίσουμε» την ταυτότητα $(x - a)^2$ προσθαφαιρώντας όρους. Το ανάλογο κόλπο, σκεφτήκαμε, ότι θα δουλεύει και σε εξισώσεις τρίτου βαθμού και, όπως είδαμε σε αυτήν την απλή περίπτωση, όντως, δουλεύει. Όμοια, με πολύ περισσότερο κόπο, βέβαια, μπορούμε να χειριστούμε και τετάρτου βαθμού εξισώσεις, αλλά, από πέμπτου βαθμού και πάνω, «κάτι χαλάει». Όσοι θέλετε να δείτε και κάτι παραπάνω σε σχέση με αυτό, μπορείτε να ξεκινήσετε από τον ακόλουθο σύνδεσμο: https://en.wikipedia.org/wiki/AbelE28093Ruffini_theorem.

- η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2)$ και $(-2, \sqrt[3]{2} - 1]$,
- η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\sqrt[3]{2} - 1, \infty)$ και,
- η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο

$$D(\sqrt[3]{2} - 1, f(\sqrt[3]{2} - 1)).$$

Τα παραπάνω συμπεράσματα συνοψίζονται στον πίνακα 7.1.

x	$-\infty$	-2	$\sqrt[3]{2} - 1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$				

Πίνακας 7.1: Ο πίνακας μονοτονίας της f .

5. Εφ' όσον η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \left(\frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{(x+2)^2} \right)' e^x + \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{(x+2)^2} (e^x)' = \\
 &= \frac{(x^3 + 3x^2 + 3x - 1)'(x+2)^2 - (x^3 + 3x^2 + 3x - 1)((x+2)^2)'}{(x+2)^4} e^x + \\
 &\quad + \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{(x+2)^2} e^x = \\
 &= \frac{(3x^2 + 6x + 3)(x+2)^2 - 2(x+2)(x^3 + 3x^2 + 3x - 1)}{(x+2)^4} e^x + \\
 &\quad + \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{(x+2)^2} e^x = \\
 &= \left(\frac{(x+2)[(3x^2 + 6x + 3)(x+2) - 2(x^3 + 3x^2 + 3x - 1)]}{(x+2)^4} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{(x+2)^2} \right) e^x = \\
 &= \left(\frac{3x^3 + 12x^2 + 15x + 6 - 2x^3 - 6x^2 - 6x + 2}{(x+2)^3} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{(x+2)^2} \right) e^x = \\
 &= \left(\frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 8}{(x+2)^3} + \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{(x+2)^2} \right) e^x = \\
 &= \frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 8 + (x^3 + 3x^2 + 3x - 1)(x+2)}{(x+2)^3} e^x = \\
 &= \frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 8 + x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 5x - 2}{(x+2)^3} e^x = \\
 &= \frac{x^4 + 6x^3 + 15x^2 + 14x + 6}{(x+2)^3} e^x.
 \end{aligned}$$

Ουφ! Τώρα, αφού $x \neq -2$ και $e^x > 0$, η εξίσωση $f''(x) = 0$ είναι ισοδύναμη με την:

$$x^4 + 6x^3 + 15x^2 + 14x + 6 = 0.$$

Άντε να τη λύσουμε κι αυτή. Εδώ, βασικά, ας θυμηθούμε την ταυτότητα:

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

η οποία, αν πάρουμε για⁵ $a = x$ και $b = \frac{3}{2}$, τότε έχουμε:

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^4 = x^4 + 6x^3 + \frac{27}{2}x^2 + \frac{27}{2}x + \frac{81}{16},$$

οπότε, η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^4 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{15}{16} = 0.$$

Ας επεξεργαστούμε λίγο εκείνο το μοναχικό τριώνυμο που περίσσεψε στην άκρη:

$$\Delta = \frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{15}{16} = -\frac{43}{8} < 0,$$

επομένως, το τριωνυμάκι αυτό είναι πάντα ομόσημο του $\frac{3}{2}$, δηλαδή θετικό. Επομένως, δεδομένου ότι και το $\left(x + \frac{3}{2}\right)^4$ είναι μη αρνητικό, έπεται ότι η εξίσωση είναι αδύνατη, άρα η $f''(x)$ είναι μη μηδενική⁶. Επειδή η f'' είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, αρκεί να επιλέξουμε από μία τιμή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -2)$ και $(-2, +\infty)$ για να την μελετήσουμε ως προς το πρόσημο. Επιλέγουμε, λοιπόν:

$$-3 \in (-\infty, -2) \text{ και } 0 \in (-2, +\infty),$$

και υπολογίζουμε:

$$f''(-3) = -45e^{-3} < 0 \text{ και } f''(0) = \frac{3}{4} > 0,$$

οπότε, ο πίνακας προσήμου της f'' είναι ο:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	\parallel	$+$

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι:

- η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, -2)$ και,
- η f είναι κυρτή στο διάστημα $(-2, +\infty)$,

όπως φαίνεται και στον πίνακα 7.2.



6. Ας υπολογίσουμε τώρα και το όριο στα άκρα του πεδίου ορισμού της συνάρτησης:

- Στο $-\infty$, παρατηρούμε ότι, αν μπορούμε να γράψουμε το όριο στη μορφή:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x + 2} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{e^{-x}(x + 2)},$$

⁵Και από πού μας ήρθε εμάς αυτό; Κοιτάζτε να δείτε, μία απάντηση είναι ότι όσο κανείς εξασκείται, τόσο βλέπει πράγματα που θα του κάνουν τη ζωή εύκολη. Η άλλη απάντηση είναι ότι, ένας γνήσιος τεμπέλης, πρώτα κοιτάει (και, ενδόμυχα, ελπίζει) κάθε εξίσωση να μην έχει λύση, για να αποφύγει τις πράξεις...

⁶Στις συνέπειες του θεωρήματος του Rolle, είδαμε ότι αυτό σημαίνει ότι η f' είναι 1-1. Εξηγήστε γιατί στην περίπτωση αυτή, αυτό δεν μπορούμε να το συμπεράνουμε.

x	$-\infty$	-2	∞
$f''(x)$	-		+
$f(x)$			

Πίνακας 7.2: Ο πίνακας κυρτότητας της f .

οπότε, θέτοντας:

$$y = -x, \quad y \rightarrow +\infty,$$

έχουμε το όριο:

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2 - 1}{e^y(2 - y)},$$

το οποίο είναι της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$, και:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(y^2 - 1)'}{(e^y(2 - y))'} &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2y - 1}{(e^y)'(2 - y) + e^y(2 - y)'} = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2y - 1}{e^y(2 - y) - e^y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2y - 1}{e^y(1 - y)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{y}}{\frac{1}{y} - 1} \cdot \frac{1}{e^y} = \\ &= \frac{2 - 0}{0 - 1} \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

επομένως, από τον κανόνα de l' Hospital, το όριο της f υπάρχει και, μάλιστα:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

- Στο -2^- , έχουμε, αφού $f(x) < 0$ κοντά στο -2 από αριστερά:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 1}{x + 2} e^x = \frac{4e^{-2}}{0} = -\infty.$$

- Ανάλογα, στο -2^+ , έχουμε, αφού $f(x) > 0$ κοντά στο -2 από δεξιά:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 1}{x + 2} e^x = \frac{4e^{-2}}{0} = +\infty.$$

- Στο $+\infty$, δεδομένου ότι:

$$e^x \geq x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

και, αφού $\frac{x^2-1}{x+2} > 0$ κοντά στο $+\infty$, έχουμε:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2} e^x \geq \frac{x^2 - 1}{x + 2} (x + 1) = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x + 2}.$$

Επίσης:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}{1 + \frac{2}{x}} = \\
&= \frac{+\infty(1 + 0 - 0 - 0)}{1 + 0} = +\infty,
\end{aligned}$$

επομένως, αφού:

$$f(x) \geq \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x + 2},$$

έπεται ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

7. Από τα προηγούμενα, άμεσα προκύπτει ότι η f έχει μία ακτακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = -2$, την ευθεία:

$$x = -2,$$

και μία οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$, την:

$$y = 0.$$

Μένει, λοιπόν, να εξετάσουμε το $+\infty$. Υπολογίζουμε το όριο:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x + 2} \cdot \frac{e^x}{x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x} e^x = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right)} e^x = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} e^x = \\
&= \frac{1 - 0}{1 + 0} \cdot (+\infty) = +\infty,
\end{aligned}$$

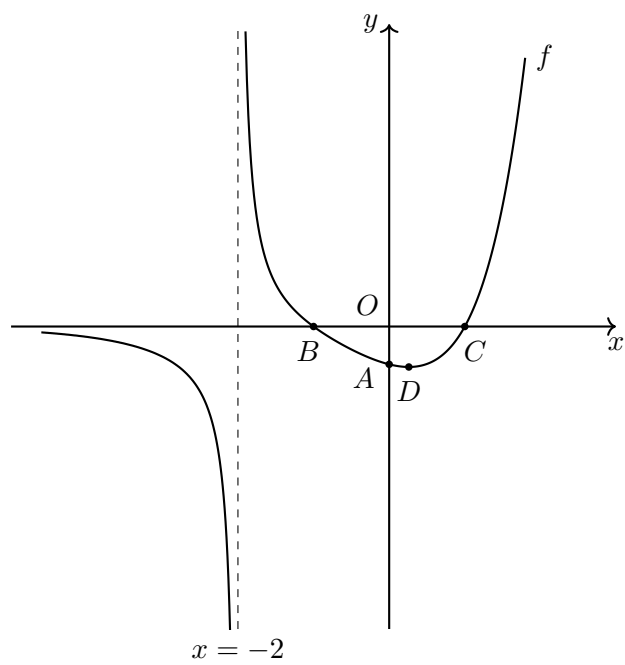
επομένως, η f δεν έχει πλάγια (άρα ούτε οριζόντια) ασύμπτωτη στο $+\infty$.

8. Κατασκευάζουμε το πίνακα μεταβολών της f , όπως φαίνεται στον πίνακα 7.3.

x	$-\infty$	-2	$\sqrt[3]{2} - 1$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+
$f''(x)$	-	+		+
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ Τ. ελάχ.		$+\infty$ ↗

Πίνακας 7.3: Ο πίνακας μεταβολών της f .

9. Με βάση τον πίνακα μεταβολών, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, όπως φαίνεται και στο σχήμα 7.1.



Σχήμα 7.1: Η γραφική παράσταση της f .

Κεφάλαιο 8

Ασκήσεις

8.1 Ερωτήσεις Σωστού ή Λάθους

Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις ως **Σωστές** ή **Λανθασμένες** και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας (απόδειξη ή αντιπαράδειγμα):

1. $(\ln 3)' = \frac{1}{3}$.
2. $\frac{dx^2}{dy} = 2x$.
3. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα $x_0 \in D_f$ τότε είναι και παραγωγίσιμη στο x_0 .
4. Αν $f(x) = 2g(x) + x^{2020}$ και η f είναι παραγωγίσιμη, τότε και η g είναι παραγωγίσιμη.
5. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x) - 3f(x) = 6x^2,$$

τότε η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

6. Αν $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
7. Αν για δύο συναρτήσεις f, g ισχύει ότι $f'(1) = g'(1)$ τότε οι δύο συναρτήσεις έχουν κοινή εφαπτομένη.
8. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης ακριβώς σε ένα σημείο.
9. Αν η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f έχει οριζόντια εφαπτομένη σε ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 .
10. Αν η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f έχει οριζόντια εφαπτομένη σε ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ και το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 .
11. Αν μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα $a \in \mathbb{R}$ τότε ούτε η συνάρτηση $g(x) = f(x)$ με $D_g = [a, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη στο a .
12. Αν η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε και οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 .
13. $(f(g(x_0)))' = f'(x_0)g'(x_0)$.

14. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$.
15. Αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $f'(x) = g'(x)$.
16. Αν $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $f'(x) < g'(x)$.
17. Αν $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $f'(x) \leq g'(x)$.
18. Αν $f'(x_0) = 0$ τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 .
19. Αν το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της f τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο εκεί.
20. Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε κάποιο $x_0 \in D_f$ τότε δεν είναι ούτε παραγωγίσιμη στο x_0 .
21. Αν $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα συνάρτηση τότε $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
22. Αν $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .
23. Αν μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(1) = 3$ και $f'(2) = 5$ τότε υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 4$.
24. Αν $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις με $g'(x_0) \neq 0$ και:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0,$$

για κάποιο $x_0 \in (a, b)$ τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

25. Αν ένα σώμα που κινείται ευθύγραμμα σε έναν δρόμο έχει διαρκώς θετική επιτάχυνση και κάποια χρονική στιγμή t_0 η ταχύτητά του ήταν μηδέν τότε τη στιγμή t_0 η συνάρτηση θέσης του σώματος, $x(t)$ είχε την ελάχιστη τιμή της.

8.2 Α Ομάδας

1. Να υπολογίσετε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων στο αντίστοιχο x_0 , χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου σε σημείο:

$$f_1(x) = 2x^2 + 1, \quad x_0 = -1$$

$$f_2(x) = \sqrt{2x}, \quad x_0 = 8$$

$$f_3(x) = \frac{3}{x-1}, \quad x_0 = 2$$

$$f_4(x) = 3x^4 - 4x, \quad x_0 = 2$$

$$f_5(x) = x^3 + x + 1, \quad x_0 = 0$$

$$f_6(x) = x + 2\sqrt{x}, \quad x_0 = 1.$$

εξηγήσετε γιατί. Στις περιπτώσεις που αυτό είναι εφικτό, να κάνετε και το αντίστοιχο σχήμα:

$$f_1(x) = 3 - x^2, \quad A(1, f(1))$$

$$f_2(x) = \sqrt{2-x}, \quad A(-2, f(-2))$$

$$f_3(x) = \frac{2+x}{x}, \quad A(3, f(3))$$

$$f_4(x) = 9x^3 - 2x, \quad A(0, f(0))$$

$$f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}, \quad A(3, f(3))$$

$$f_6(x) = 3x + 4, \quad A(-2, f(-2)).$$

2. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων των παρακάτω συναρτήσεων στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ή, αν αυτές δεν υπάρχουν, να

3. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων όπου αυτές ορίζονται:

$$f_1(x) = 19x^4 - 4x^3 + 2x - 8$$

$$f_2(x) = \eta\mu x - 2x \sigma\upsilon\nu x$$

$$f_3(x) = \frac{e^x}{x^2 \eta\mu^2 x + 2}$$

$$f_4(x) = \ln x - 4x^2 + 2$$

$$f_5(x) = 3xe^x \sigma\upsilon\nu x$$

$$f_6(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{\ln x}$$

$$f_7(x) = 2x(x + e^x).$$

4. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων όπου αυτές ορίζονται:

$$f_1(x) = e^{2x^2+3x}$$

$$f_2(x) = \ln(e^x - 1 - x)$$

$$f_3(x) = \ln(\ln(\ln x))$$

$$f_4(x) = x^{x^2+3}$$

$$f_5(x) = \eta\mu(\sigma\upsilon\nu(\epsilon\varphi x))$$

$$f_6(x) = 2x \ln(x^2 + 1)$$

$$f_7(x) = \sqrt{3x^3 - 3}$$

$$f_8(x) = \frac{x \ln(2 + x)}{e^{3x-2}}$$

$$f_9(x) = \eta\mu^2(3x + 2) + \frac{4}{2x^3 - 1}.$$

5. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παρακάτω συναρτήσεων, αν υπάρχουν, αλλιώς να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχουν:

$$f_1(x) = x^3 + 2x^2 + x - 2, \quad x \in [-6, 2]$$

$$f_2(x) = x^2 + \ln x + x, \quad x \in (0, 3)$$

$$f_3(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f_4(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f_5(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f_6(x) = \frac{2x}{x^2 - 3}, \quad x \in [4, +\infty).$$

6. Να γράψετε τον ορισμό του κρίσιμου σημείου και στη συνέχεια να εξηγήσετε τι συμπεράσματα μπορείτε να βγάλετε για μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία δεν έχει κρίσιμα σημεία.

7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$(\alpha') \quad x^5 - 4x^2 + 2 = 0 \text{ έχει ακριβώς 3 ρίζες,}$$

$$(\beta') \quad x^7 + 4x^4 - 3 = 0 \text{ έχει ακριβώς 3 ρίζες,}$$

$$(\gamma') \quad xe^{x^2-1} = 0 \text{ έχει ακριβώς 1 ρίζα,}$$

$$(\delta') \quad \sigma\upsilon\nu x - \frac{x^2}{2} = \pi \text{ έχει ακριβώς 1 ρίζα.}$$

8. Να δείξετε ότι αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη σε κανένα σημείο τότε η f είναι 1-1.

9. Αν $f(x) = e^x - x^2 + x$, να δείξετε ότι:

$$(\alpha') \text{ υπάρχει } \xi_1 \in (0, 1) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi_1) = e - 1,$$

$$(\beta') \text{ υπάρχει } \xi_2 \in (0, 3) \text{ τέτοιο ώστε } 3f'(\xi_2) = e^3 - 7,$$

$$(\gamma') \text{ υπάρχει } \xi_3 \in (-2, 0) \text{ τέτοιο ώστε } 2e^2 f'(\xi_3) = 7e^2 - 1.$$

10. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

$$(\alpha') \quad \frac{1}{x+1} < \ln \frac{x+1}{x} < \frac{1}{x}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

$$(\beta') \quad \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(x+1)} > \epsilon\varphi(x+1) - \epsilon\varphi x > \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, \text{ για κάθε } x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

$$(\gamma') \quad e^x(y-x) < e^y - e^x < e^y(y-x), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \text{ με } x < y.$$

$$(\delta') \quad \frac{x}{x+2} < \ln \frac{2x+1}{x+1} < \frac{x}{x+1}, \text{ για κάθε } x > -1.$$

11. Αν $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση που:

- είναι συνεχής στο $[0, 1]$,
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$,

τότε, να δείξετε ότι:

$$(\alpha') \text{ υπάρχουν } \xi_1, \xi_2 \in (0, 1), \text{ με } \xi_1 < \xi_2 \text{ τέτοια ώστε:}$$

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 2(f(1) - f(0)).$$

$$(\beta') \text{ υπάρχουν } \xi_1, \xi_2 \in (0, 1), \text{ με } \xi_1 < \xi_2 \text{ τέτοια ώστε:}$$

$$f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) = 3(f(1) - f(0)).$$

$$(\gamma') \text{ υπάρχουν } \xi_1, \xi_2 \in (0, 1), \text{ με } \xi_1 < \xi_2 \text{ τέτοια ώστε:}$$

$$f'(\xi_1) + 4f'(\xi_2) = 5(f(1) - f(0)).$$

(δ') υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$, με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) + af'(\xi_2) = (a+1)(f(1) - f(0)),$$

για κάθε $a \geq 1$.

12. Να μελετήσετε τις ακόλουθες συναρτήσεις ως προς την μονοτονία:

$$f_1(x) = 6x^3 - 9x^2 + 4$$

$$f_2(x) = \ln(4x + x^2), \quad x > 0$$

$$f_3(x) = 2xe^{3x-2}$$

$$f_4(x) = \frac{x^2}{2} - \sin x$$

$$f_5(x) = x \ln x, \quad x > 0$$

$$f_6(x) = 4x^3 - 5x^2 + \ln x, \quad x > 0$$

$$f_7(x) = \frac{2x-1}{x+2}$$

$$f_8(x) = 5x^5 + 3x^3 + 2019.$$

13. Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f_1(x) = 4x^3 - 5x^2 - 2x - 3$$

$$f_2(x) = 2x + x \ln x, \quad x > 0$$

$$f_3(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$f_4(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x > 0$$

$$f_5(x) = \ln(e^x + 2)$$

$$f_6(x) = 4x^3 - 5x^2 + \ln x, \quad x > 0.$$

14. Να βρείτε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $f(x) = a$, για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, όπου:

$$f(x) = x^2 e^{4x-5}.$$

15. Δίνεται μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x) + xf(x) = 0,$$

με $f(0) = 1$.

(α') Να δείξετε ότι η συνάρτηση:

$$\phi(x) = e^{-x^2/2} f(x),$$

είναι σταθερή.

(β') Να βρείτε τον τύπο της f .

(γ') Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(δ') Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f .

(ε') Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

(ς') Να μελετήσετε την f' ως προς την μονοτονία.

(ζ') Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα:

$$f(2x) > f(x) - x^2 f(x),$$

για κάθε $x > 1$.

16. Δίνεται μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x) + \frac{1}{x} f(x) = 0,$$

με $f(1) = 4$.

(α') Να δείξετε ότι η συνάρτηση:

$$\phi(x) = xf(x),$$

είναι σταθερή.

(β') Να βρείτε τον τύπο της f .

(γ') Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(δ') Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f .

(ε') Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $A(2, f(2))$.

(ς') Να μελετήσετε την f' ως προς την μονοτονία.

(ζ') Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα:

$$f(x+1) - f(x) < f'(x+1),$$

για κάθε $x > 0$.

17. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f_1(x) = x^3 - 4x^2 + 3$$

$$f_2(x) = \frac{2x^2}{4x-1}$$

$$f_3(x) = \frac{3x-4}{4x^2+5}$$

$$f_4(x) = \frac{\ln x}{x-2}$$

$$f_5(x) = e^{x^2-5x+6}$$

$$f_6(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$f_7(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f_8(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f_9(x) = 4x^{x-1}.$$

8.3 Β' Ομάδας

1. Να εξετάσετε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη η παρακάτω συνάρτηση στο $x_0 = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} |x|^a \eta \mu \frac{a}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

2. Να δείξετε ότι αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε:

$$(fgh)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)h(x_0) + f(x_0)g'(x_0)h(x_0) + f(x_0)g(x_0)h'(x_0).$$

3. Με βάση την προηγούμενη άσκηση, μπορείτε να βρείτε έναν γενικό τύπο για την παράγωγο γινομένου ν συναρτήσεων, f_1, f_2, \dots, f_ν που είναι παραγωγίσιμες σε ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$; Με άλλα λόγια, να συμπληρώσετε το παρακάτω:

$$(f_1 f_2 \dots f_\nu)'(x_0) = \dots$$

4. Αν $a(x), b(x), c(x) : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ είναι τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις και:

$$f(x) = \frac{a(x)b(x)}{c(x)},$$

τότε, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα:

$$f'(x) = \left(\frac{a'(x)}{a(x)} + \frac{b'(x)}{b(x)} - \frac{c'(x)}{c(x)} \right) f(x).$$

5. Να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία να ισχύει:

$$f'(x) = \frac{|x|}{x}, \quad x \neq 0.$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - 4$ και το σημείο $A(3, 3)$. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από το A .

7. Αν $f(x = x^2$ και $A(a, b)$ είναι ένα σημείο να βρείτε ποια σχέση (ή σχέσεις) πρέπει να ικανοποιούν οι συντεταγμένες $a, b \in \mathbb{R}$ του A έτσι ώστε να **μην** υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που να διέρχεται από το A . Ένα σχήμα, όπως πάντα, θα βοηθήσει αρκετά.

8. Αν $f(x) = x^3$, τότε να δείξετε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ υπάρχει τουλάχιστον μία εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που να διέρχεται από το σημείο $A(a, b)$. Κάντε ένα σχήμα και συγκρίνετε αυτό το αποτέλεσμα με την προηγούμενη άσκηση.

9. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση τότε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό, να δείξετε ότι:

- αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή, ενώ,
- αν η f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x.$$

(α') Να την μελετήσετε ως προς την μονotonία.

(β') Να δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την παράγωγό της.

(γ') Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x) \geq 2, \quad \forall x > 0.$$

11. Να δείξετε ότι η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της.

12. Να βρείτε τα $a, b \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3 & x > 1 \\ 3x - 2b & x \leq 1 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

13. Αν $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι:

$$xf(x) + 3 \sin x \geq 3,$$

να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) + xf'(x) = 3 \eta \mu x,$$

έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(-1, 1)$.

14. Αν $f : [0, 2] \rightarrow [-2, 0]$ είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι:

$$x^2 f(x) + \sin(\pi x) \leq 1 + 4f(x),$$

να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{2xf(x) + (x^2 - 4)f'(x)}{\pi} = \eta \mu(\pi x),$$

έχει τουλάχιστον μία λύση στο $[0, 2]$.

15. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση, να δείξετε ότι ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ρίζες της f' υπάρχει το πολύ μία ρίζα της f .

16. Μπορείτε να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία να είναι 1-1 και, εντούτοις, να υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε:

$$f'(x_0) = 0;$$

17. Να δείξετε ότι αν $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις συνεχείς στο $[a, b]$, παραγωγίσιμες στο (a, b) και για τις οποίες ισχύει ότι:

$$f(a) + g(b) = g(a) + f(b),$$

τότε υπάρχει ένα $\xi \in (a, b)$ έτσι ώστε οι εφαπτόμενες των f, g στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$ να είναι παράλληλες.

18. Αν $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση η οποία:

- είναι συνεχής στο $[a, b]$,
- είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) και,
- $f(a) = f(b) = 0$,

τότε, να δείξετε ότι υπάρχει ένα $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = 3\xi^2 f(\xi).$$

19. Να δώσετε παράδειγμα συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που να είναι παραγωγίσιμη και $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αλλά η f να μην είναι γνησίως αύξουσα.

20. Να αποδείξετε ότι αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με γνησίως μονότονη παράγωγο, τότε η f έχει το πολύ δύο ρίζες.

21. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x) - 2xf(x) = (f(x))^2 + x^2,$$

τότε:

(α') να δείξετε ότι $f'(x) \geq 0$,

(β') να δείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = x + f(x)$$

είναι γνησίως αύξουσα,

22. Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x) - 3x^2 f(x) = -f(x),$$

με $f(0) = 2$.

(α') Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της f στο $A(0, f(0))$.

(β') Να δείξετε ότι η συνάρτηση:

$$\phi(x) = e^{x-x^3} f(x),$$

είναι σταθερή.

(γ') Να βρείτε τον τύπο της f .

(δ') Να μελετήσετε την f ως προς την μονotonία και τα ακρότατα.

(ε') Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f .

(ζ') Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της f που διέρχεται από το σημείο $B(0, 6)$.

(ζ') Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) + x = 0,$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

(η') Αν F είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$F'(x) = f(x),$$

τότε, να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$F(x) = 2x,$$

έχει το πολύ τέσσερις ρίζες.

(θ') Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$F(x) = \frac{1}{f(x)},$$

έχει το πολύ μία λύση.

(ι') Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$\frac{F(x+1) - F(x)}{2} < e^{x^3+3x^2-4x},$$

για κάθε $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

23. Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$xf'(x) - x^2f(x) = e^{x^2/2},$$

με $f(1) = 1$.

(α') Να δείξετε ότι η συνάρτηση:

$$\phi(x) = e^{-x^2/2}f(x) - \ln x,$$

είναι σταθερή.

(β') Να βρείτε τον τύπο της f .

(γ') Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f .

24. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία παραγωγίσιμη και κοίλη συνάρτηση, τότε να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$ ισχύει:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) > \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Στη συνέχεια, να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω αποτελέσματος.

25. Δίνεται μία δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x) - e^{f(x)} = 4e^{2x+1},$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $f(0) = 1$.

(α') Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $A(0, f(0))$.

(β') Να μελετήσετε την f ως προς την μονotonία και τα ακρότατα.

(γ') Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

(δ') Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$f(x) \geq 5ex + 1 - 5e,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πότε ισχύει το " $=$ ";

(ε') Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

26. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$, τότε:

(α') αν η f είναι άρτια, να αποδείξετε ότι είναι κυρτή σε όλο το \mathbb{R} , ενώ,

(β') αν η f είναι περιττή, να αποδείξετε ότι είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και ότι παρουσιάζει σημείο καμπής στο $O(0, 0)$.

Να σχεδιάσετε από ένα σχήμα για καθεμιά από τις παραπάνω περιπτώσεις.

8.4 Γ' Ομάδα

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$ και ένα σημείο $A(a, b)$ του επιπέδου.

(α') Να δείξετε ότι αν $b \leq 0$ τότε δεν υ-

πάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που να διέρχεται από το A .

- (β') Να δείξετε ότι αν $0 < b \leq e^a$ τότε υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που να διέρχεται από το A .
- (γ') Να δείξετε ότι αν $b > e^a$ τότε δεν υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που να διέρχεται από το A .
- (δ') Να γραμμοσκιιάσετε το χωρίο στο οποίο πρέπει να βρίσκεται το A για να διέρχεται από αυτό κάποια εφαπτομένη της f .
2. Είδαμε ότι αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη τότε είναι και συνεχής. Ωστόσο, αρκεί και κάτι ασθενέστερο. Έστω μία συνάρτηση f και $x_0 \in D_f$ τέτοιο ώστε να υπάρχουν η αριστερή και η δεξιά παράγωγος στο x_0 , δηλαδή να υπάρχουν και να είναι πραγματικοί αριθμοί τα όρια:
- $$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$
- Να δείξετε ότι, ανεξάρτητα από το αν τα όρια αυτά είναι ίσα ή όχι, η f είναι συνεχής στο x_0 .
3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + 3ax^2 - \eta\mu(a - 1)x + 1$, $a \in \mathbb{R}$, και $g(x) = \ln x$.
- (α') Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της g που διέρχεται από το σημείο $A(4, 3)$.
- (β') Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g τέμνονται στο σημείο $B(1, 0)$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.
- (γ') Να βρείτε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν στο κοινό τους σημείο $B(1, 0)$ κοινή εφαπτομένη.
4. Ένα σώμα κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο με τη θέση του να δίνεται σαν συνάρτηση του χρόνου από τη συνάρτηση:
- $$x(t) = 2t^3 - 3t^2 + 2t - 8, \quad t \geq 0.$$
- (α') Να βρείτε τη θέση του τις χρονικές στιγμές $t_0 = 0s$, $t_1 = 3s$ και $t_2 = 5s$.
- (β') Να βρείτε την ταχύτητά του, $v(t)$, σαν συνάρτηση του χρόνου.
- (γ') Να βρείτε την επιτάχυνσή του, $a(t)$, σαν συνάρτηση του χρόνου.
- (δ') Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των $v(t)$ και $a(t)$.
- (ε') Να βρείτε τις ρίζες της $a(t)$, τα ολικά ακρότατα της $v(t)$.
- (ς') Να μελετήσετε την $a(t)$ ως προς το πρόσημο και την $v(t)$ ως προς την μονotonία.
- (ζ') Σε σχέση με τα δύο προηγούμενα ερωτήματα, παρατηρείτε κάποια σχέση ανάμεσα στα ζητούμενα; Προσπαθήστε να δώσετε μία φυσική ερμηνεία σε αυτές τις σχέσεις.
5. Για ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση (Α.Α.Τ.) η θέση του δίνεται σαν συνάρτηση του χρόνου από την εξίσωση:
- $$x(t) = A\eta\mu(\omega t + \phi_0), \quad t \geq 0,$$
- όπου το A λέγεται πλάτος της ταλάντωσης, το ω γωνιακή συχνότητα και το ϕ_0 αρχική φάση.
- (α') Να βρείτε την ταχύτητα ενός σώματος που εκτελεί Α.Α.Τ., $v(t)$, σαν συνάρτηση του χρόνου.
- (β') Να βρείτε την επιτάχυνση ενός σώματος που εκτελεί Α.Α.Τ., $a(t)$, σαν συνάρτηση του χρόνου.
- (γ') Για $\omega = \pi$, $A = 2$ και $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$ ανά δύο σε ξεχωριστά διαγράμματα.
- Τι σχέσεις παρατηρείτε ανάμεσα στα διαγράμματα των $x(t)$ και $v(t)$;
 - Τι σχέσεις παρατηρείτε ανάμεσα στα διαγράμματα των $a(t)$ και $v(t)$;
 - Τι σχέσεις παρατηρείτε ανάμεσα στα διαγράμματα των $x(t)$ και $a(t)$;

- (δ') Μπορείτε να βρείτε μία συνάρτηση $f(t)$ που να ικανοποιεί την εξής σχέση:
- $$f''(t) + Cf(t) = 0,$$
- όπου $C > 0$ είναι κάποια σταθερά;
- (ε') Μπορείτε να βρείτε τη σχέση του προηγούμενου ερωτήματος με όλα τα παραπάνω;
6. Να βρείτε, αν υπάρχει, μία συνάρτηση $f : (0, 3) \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε:
- $f'(1) = -1$,
 - $f'(2) = -2$,
 - $f(1) = f(2) = 0$,
 - η f να είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$.
7. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να δείξετε ότι:
- (α') αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, τότε:
- $$f'(x) \geq 0,$$
- για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (β') αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, τότε:
- $$f'(x) \leq 0,$$
- για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Ισχύουν τα παραπάνω αποτελέσματα με γνήσιες ανισότητες (δηλαδή, με $>$ και $<$);
8. Πόσες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μπορείτε να βρείτε που να ικανοποιούν τη σχέση:
- $$f'(x) = -f(x);$$
9. Να δώσετε παραδείγματα συναρτήσεων $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ που να ικανοποιούν τα παρακάτω:
- (α') η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in A$, να παρουσιάζει ακρότατο στο A , αλλά $f'(x_0) \neq 0$,
- (β') η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in A$, $f'(x_0) = 0$, αλλά να μην παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 ,
- (γ') η f να είναι συνεχής στο $x_0 \in A$, να παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 , αλλά να μην είναι παραγωγίσιμη εκεί.
10. Να δώσετε παράδειγμα συνάρτησης $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία να παρουσιάζει ακρότατο σε κάθε $x_0 \in (a, b)$. Πόσες τέτοιες συναρτήσεις μπορείτε να βρείτε;
11. Να αποδείξετε ή να δώσετε αντιπαράδειγμα για τους ακόλουθους ισχυρισμούς:
- (α') Κάθε συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a, b) παρουσιάζει ακρότατο.
- (β') Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που να έχει μόνο ένα τοπικό ακρότατο και κανένα ολικό ακρότατο.
- (γ') Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη τέτοια ώστε:
- $$2 < f(x) < 3,$$
- αλλά η f να μην παίρνει ούτε ελάχιστη ούτε μέγιστη τιμή.
- (δ') Δεν υπάρχει συνάρτηση με άπειρα ακρότατα.
- (ε') Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι η εξίσωση:
- $$f'(x) = 0,$$
- έχει ρίζα.
- (ε') Δεν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που να είναι 1-1 και να έχει ολικά ακρότατα.
12. Ας παίζουμε λίγο με τις παραγώγους και τη συνέχεια!
- (α') Να βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που να είναι συνεχής στο \mathbb{R} και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .
- (β') Να βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που να είναι συνεχής στο \mathbb{R} και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} εκτός από το 0, στο οποίο να μην είναι παραγωγίσιμη.
- (γ') Να βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που να είναι συνεχής στο \mathbb{R} και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} εκτός από το 0 και το 1, στα οποία να μην είναι παραγωγίσιμη.
- (δ') Να βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που να είναι συνεχής στο \mathbb{R} και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} εκτός από τα 0, 1, 2, 3, στα οποία να μην είναι παραγωγίσιμη.

- (ε') Να βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που να είναι συνεχής στο \mathbb{R} και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} εκτός από όλους τους φυσικούς αριθμούς ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$), στους οποίους να μην είναι παραγωγίσιμη.
- (ς') Να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που να είναι συνεχής στο \mathbb{R} και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} εκτός από όλους τους ακέραιους αριθμούς ($\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$), στους οποίους να μην είναι παραγωγίσιμη.
- (ζ') Υπάρχει, άραγε, συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που να είναι συνεχής και να μην είναι παραγωγίσιμη πουθενά;
13. Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:
- $$f(x) = 0, \quad \forall x \notin [-1, 1],$$
- και, επιπλέον, $f(0) = 1$.
- (α') Να βρείτε μία συνάρτηση που να ικανοποιεί τα παραπάνω και, επιπλέον, να είναι συνεχής.
- (β') Να βρείτε μία συνάρτηση που να ικανοποιεί τα παραπάνω και, επιπλέον, να είναι παραγωγίσιμη.
- (γ') Να βρείτε μία συνάρτηση που να ικανοποιεί τα παραπάνω και, επιπλέον, να είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.
- (δ') Να βρείτε μία συνάρτηση που να ικανοποιεί τα παραπάνω και, επιπλέον, να είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη.
- (ε') Να βρείτε μία συνάρτηση που να ικανοποιεί τα παραπάνω και, επιπλέον, να είναι έντεκα φορές παραγωγίσιμη.
- (ς') Να βρείτε μία συνάρτηση που να ικανοποιεί τα παραπάνω και, επιπλέον, να είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη.
- Για όσα από τα παραπάνω θεωρείτε ότι αυτό είναι ανέφικτο, να αιτιολογήσετε κατάλληλα. Επίσης, σε ό,τι αφορά το τελευταίο, η αιτιολόγησή σας μπορεί να είναι πιο διαισθητική.
14. Πόσες συναρτήσεις $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμες στο $(0, 1)$ υπάρχουν έτσι ώστε $f'(x) = 0$;
15. Είδαμε ότι αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και έχει δύο ρίζες, τότε η παράγωγός της έχει τουλάχιστον μία ρίζα. Το αντίστροφο δεν ισχύει και, μάλιστα, δεν ισχύει όσο και να «χτυπιόμαστε». Για να το εξακριβώσετε:
- (α') να βρείτε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να μην έχει ρίζα αλλά η f' να έχει (τουλάχιστον) μία ρίζα,
- (β') να βρείτε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να μην έχει ρίζα αλλά η f' να έχει (τουλάχιστον) δύο ρίζες,
- (γ') να βρείτε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να μην έχει ρίζα αλλά η f' να έχει (τουλάχιστον) τρεις ρίζες,
- (δ') να βρείτε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να μην έχει ρίζα αλλά η f' να έχει άπειρες ρίζες,
- (ε') να βρείτε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να μην έχει ρίζα αλλά η f' να έχει άπειρες ρίζες, χωρίς όμως αυτές να αποτελούν διάστημα (δηλαδή, η f να μην είναι σταθερή σε κανένα διάστημα του πεδίου ορισμού της).
16. Αν για μία συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $0 < a < b$, ισχύει ότι:
- είναι συνεχής στο $[a, b]$,
 - είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) και,
 - $f(a) - f(b) + b^2 - a^2 = e^a - e^b + \ln \frac{b}{a}$,
- τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε:
- $$f'(\xi) = e^\xi - \frac{1}{\xi} + 2\xi.$$
17. Να αποδείξετε ότι αν ένα πολυώνυμο $p(x)$ πέμπτου βαθμού έχει ακριβώς πέντε ρίζες:
- $$\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4 < \rho_5,$$
- τότε:
- (α') η παράγωγός του $p'(x)$ έχει το πολύ τέσσερις ρίζες,

(β') οι ρίζες της παραγώγου βρίσκονται όλες μεταξύ των ρ_1 και ρ_5 .

Ισχύουν τα παραπάνω για πολυώνυμα οποιουδήποτε βαθμού;

18. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι:

$$f''(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

τότε, να αποδείξετε ότι:

(α') Η f έχει το πολύ δύο ρίζες.

(β') Αν $a < b$, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο a έχει μικρότερη κλίση από αυτήν της f στο b .

(γ') Υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε η εξίσωση:

$$f(x) = a,$$

να είναι αδύνατη.

(δ') Η εξίσωση:

$$f'(x) = -x,$$

έχει το πολύ μία ρίζα.

19. Αν $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και με $f(0) < f(1)$, τότε να δείξετε ότι υπάρχει ένα διάστημα $(a, b) \subseteq [0, 1]$ στο οποίο η f να είναι γνησίως αύξουσα.

20. Να δείξετε ότι αν για μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f'(x) = e^{-x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

τότε, να αποδείξετε ότι:

(α') η f έχει το πολύ μία ρίζα,

(β') η f δεν έχει ακρότατα,

(γ') η $f(x) = x$ έχει το πολύ δύο ρίζες,

(δ') η $f(x) = x$ έχει το πολύ μία θετική ρίζα,

(ε') η $f'(x)$ ικανοποιεί την ανισότητα:

$$(x^2 + 1)f'(x) \leq 1,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

(ε') η f ικανοποιεί την ανισότητα:

$$f(x) < f(x+1) < f(x) + \frac{1}{x^2 + 1},$$

για κάθε $x > 0$.

21. Δίνεται μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$e^{f(x)} + f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(α') Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

(β') Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$2f(x) + 1 \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(γ') Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$f'(x) \geq \frac{1}{e^{(x-1)/2} + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(δ') Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

(ε') Αποδείξτε ότι $f(x) > f(0)$ για κάθε $x > 0$ και, στη συνέχεια, υπολογίστε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x).$$

(ε') Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) + x = 0,$$

έχει μοναδική ρίζα.

(ζ') Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) - f(\pi - x) = 0,$$

έχει μοναδική ρίζα.

(η') Να αποδείξετε ότι αν η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, την ευθεία $y = b$, $b \in \mathbb{R}$, τότε, αν $b > 0$, η f έχει μοναδική ρίζα.

(θ') Να αποδείξετε ότι αν η f έχει ρίζα, τότε αυτή είναι το 1.

(ι') Αν η f έχει ρίζα, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι η ευθεία:

$$2y = x - 1.$$

22. Δίνονται δύο συνεχείς συνάρτησεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με την f , επιπλέον, να είναι και παραγωγίσιμη, που ικανοποιούν τη σχέση:

$$f'(x) + g(x)f(x) = 0,$$

με $f(0) = 1$. Αν, επιπλέον, $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση, τέτοια ώστε:

$$e^{G'(x)} - e^{g(x)} = g(x) - G'(x),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α') Να δείξετε ότι:

$$G'(x) = g(x).$$

(β') Να δείξετε ότι η συνάρτηση:

$$\phi(x) = e^{G(x)}f(x),$$

είναι σταθερή.

(γ') Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$f(x) = e^{G(0)-G(x)},$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(δ') Να δείξετε ότι, αν η G είναι γνησίως αύξουσα, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

(ε') Να δείξετε ότι, αν η G έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, τότε και η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

23. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία είναι κυρτή. Έστω, επίσης, $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$ και $\lambda \in (0, 1)$.

(α') Θεωρούμε τον πραγματικό αριθμό:

$$z_\lambda = \lambda x + (1 - \lambda)y.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$x < z_\lambda < y.$$

Στη συνέχεια, να δώσετε μία γεωμετρική ερμηνεία της παραπάνω ανισότητας.

(β') Να αποδείξετε ότι:

$$f(z_\lambda) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Στη συνέχεια, να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω αποτελέσματος.

(γ') Αν $A(x, f(x))$, $B(y, f(y))$ και $C(z_\lambda, f(z_\lambda))$ και λ_{AB} , λ_{AC} , λ_{BC} είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών AB , AC και BC αντίστοιχα, τότε να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα:

$$\lambda_{AC} < \lambda_{AB} < \lambda_{BC}.$$

Στη συνέχεια, να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω αποτελέσματος.

24. Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν τα εξής:

- $f(x+y) = f(x)f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $f'(0) \neq 0$.

(α') Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι σταθερή. Υπόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο.

(β') Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$. Υπόδειξη: Θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσετε και το προηγούμενο ερώτημα.

(γ') Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της και να υπολογίσετε την παράγωγό της.

(δ') Να βρείτε τον τύπο της f .

25. Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν τα εξής:

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $f'(0) \neq 0$.

(α') Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι σταθερή. Υπόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο.

(β') Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

(γ') Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

(δ') Να αποδείξετε ότι η f ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x-y) = f(x) - f(y),$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(ε') Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της και να υπολογίσετε την παράγωγό της.

(ϵ') Να βρείτε τον τύπο της f .

26. Δίνεται μία συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν τα εξής:

- $f(xy) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και

$$f'(1) \neq 0.$$

(α') Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι σταθερή. Υπόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο.

(β') Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$.

(γ') Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της και να υπολογίσετε την παράγωγό της.

(δ') Να βρείτε τον τύπο της f .

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Η κατασκευή εφαπτομένης ενός κύκλου	5
1.2	Η γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$	6
1.3	Η ανάλυση της μεθόδου του κύκλου του Descartes.	7
1.4	Η εύρεση της εφαπτομένης της $f(x) = x^2$ στο P	10
1.5	Η εύρεση της εφαπτομένης της $f(x) = x^2$ σε κάθε $x \in \mathbb{R}$	10
1.6	Ένα απείρως μικρό τόξο πάνω στην παραβολή.	12
1.7	Η εφαπτομένη της $f(x) = x^3$ στο $P(1, 1)$	14
1.8	Μια εφαπτομένη της $f(x) = \eta\mu x$ που δε γίνεται να έχει κλίση 0.	15
1.9	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f	15
1.10	Στον δρόμο για την εφαπτομένη.	16
1.11	Η εφαπτομένη (ε) της f στο P	17
1.12	Παίζοντας με της «εφαπτόμενες».	18
1.13	Μία προσέγγιση της f μέσα από τις εφαπτόμενές της.	19
1.14	Οι «εφαπτόμενες» της f στο $O(0, 0)$	20
1.15	Η γραφική παράσταση της f	21
1.16	Η κατακόρυφη εφαπτομένη της f	22
1.17	Η κατακόρυφη εφαπτομένη της f	23
1.18	Οι «υποψήφιες» κατακόρυφες εφαπτόμενες της f	24
2.1	Η ανισότητα $e^x \geq x + 1$	33
2.2	Η ανισότητες που χρησιμοποιήσαμε για την εύρεση της $f'(0) = 1$	35
2.3	Η παράγωγος αθροίσματος.	37
2.4	Η παράγωγος βαθμωτού γινομένου.	38
2.5	Η παράγωγος γινομένου συναρτήσεων.	40
3.1	Τοπικά ακρότατα.	53
3.2	Η «απόδειξη» του θεωρήματος του Fermat.	54
3.3	Η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Rolle.	60
3.4	Η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.	64
3.5	Μία συνάρτηση για την απόδειξη του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.	65
3.6	Το μήκος (QQ')	66
3.7	Η «ψευδοστροφή» της f	66
4.1	Δύο συναρτήσεις με ίδια παράγωγο.	73
4.2	Παράγωγος και μονοτονία.	76
5.1	Μία κυρτή συνάρτηση.	81
5.2	Μία κοίλη συνάρτηση.	82
5.3	Ένα σημείο καμπής.	83
7.1	Η γραφική παράσταση της f	100

Κατάλογος Πινάκων

2.1	Οι παράγωγοι των βασικών συναρτήσεων.	50
2.2	Οι κανόνες παραγωγίσης.	50
4.1	Ο πίνακας μονοτονίας της f	77
4.2	Ο πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων της f	80
5.1	Ο πίνακας κυρτότητας της f	85
5.2	Ο πίνακας κυρτότητα της $f(x) = 2e^x - x^2$	88
7.1	Ο πίνακας μονοτονίας της f	96
7.2	Ο πίνακας κυρτότητας της f	98
7.3	Ο πίνακας μεταβολών της f	99