Μελέτη των παρακάτω ορίων (χωρίς ακολουθίες):

$$\lim_{x\to\pm\infty} \eta\mu x,\ \lim_{x\to\pm\infty} \sigma\upsilon\nu x,\ \lim_{x\to 0^{\pm}} \eta\mu\frac{1}{x},\ \lim_{x\to 0^{\pm}} \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}.$$

του Αντώνη Κυριακόπουλου

Πρόταση . Δεν υπάρχουν τα όρια: $\lim_{x\to\pm\infty} \eta\mu x,\ \lim_{x\to\pm\infty} \sigma\upsilon\nu x$.

Απόδειξη. α) Έστω ότι το όριο $\lim_{x\to+\infty} \eta\mu x$ υπάρχει και είναι α. Επειδή: $-1 \le \eta\mu x \le 1$, για κάθε $x \in R$, το α δεν μπορεί να είναι το $+\infty$, ούτε το $-\infty$. Άρα, το α ανήκει στο R ($-1 \le \alpha \le 1$). Έχουμε:

$$\alpha = \lim_{x\to+\infty} \eta\mu x = \lim_{x\to+\infty}[-\eta\mu(x+\pi)] = -\lim_{x\to+\infty} \eta\mu(x+\pi).$$

Θέτουμε :y=x+π, οπότε: $\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}(x+\pi) = +\infty$. Έτσι έχουμε:

$$\alpha = -\lim_{x\to+\infty} \eta\mu(x+\pi) = -\lim_{y\to+\infty} \eta\mu y = -\lim_{x\to+\infty} \eta\mu x = -\alpha \Rightarrow \alpha = -\alpha \Rightarrow \alpha = 0.$$

Συνεπώς: $\lim_{x\to+\infty} \eta\mu x = 0$. Έτσι έχουμε:

$$0 = \lim_{x\to+\infty} \eta\mu x = \lim_{x\to+\infty}\left[-\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}+x)\right] = -\lim_{x\to+\infty}\left[\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}+x)\right] = -\lim_{y\to+\infty} \sigma\upsilon\nu y$$ (θέσαμε: $y = \frac{\pi}{2} + x$). Συνεπώς: $\lim_{x\to+\infty} \sigma\upsilon\nu x = 0$. Έτσι έχουν:

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \eta\mu x = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \sigma\upsilon\nu x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \eta\mu^2 x = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \sigma\upsilon\nu^2 x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} 1 = 0 \Rightarrow 1 = 0,$$

άτοπο. Άρα, το όριο $\lim_{x\to+\infty} \eta\mu x$ δεν υπάρχει.

β) Όμοια δείχνουμε ότι, και κάθε ένα από τα όρια: $\lim_{x\to-\infty} \eta\mu x,\ \lim_{x\to+\infty} \sigma\upsilon\nu x,\ \lim_{x\to-\infty} \sigma\upsilon\nu x$ δεν υπάρχει.

(Η απόδειξη είναι από το περιοδικό «ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β΄», τεύχος 41, σελίδα 28, με ελαφρές τροποποιήσεις και συμπληρώσεις).

Συνέπειες . Δεν υπάρχουν τα όρια: $\lim_{x\to 0^{\pm}} \eta\mu\frac{1}{x},\ \lim_{x\to 0^{\pm}} \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$.

Απόδειξη. α) Έστω ότι το όριο $\lim_{x\to 0^+} \eta\mu\frac{1}{x}$ υπάρχει. Θέτουμε: $y = \frac{1}{x}$. Έχουμε:

$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Έτσι έχουμε: $\lim_{x\to 0^+} \eta\mu\frac{1}{x} = \lim_{y\to+\infty} \eta\mu y$, άτοπο, γιατί , σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, το δεξιά όριο δεν υπάρχει.

β) Όμοια δείχνουμε ότι, και κάθε ένα από τα υπόλοιπα όρια δεν υπάρχει.

— Προφανώς και τα όρια: $\lim_{x\to 0} \eta\mu\frac{1}{x},\ \lim_{x\to 0} \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$ δεν υπάρχουν.