ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΝ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΑΝΟΔΟΣ

ΓΚΥΖΗ 14 - ΑΘΗΝΑ 64.52.777 64.52.749

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΣΑΚΑΡΙΚΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

1) ΣΥΝΟΛΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τα σύνολα των αριθμών είναι τα εξής :

1) Οι **φυσικοί** αριθμοί : $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

2) Οι **ακέραιοι** αριθμοί : $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

3) Οι **ρητοί** αριθμοί : $Q = \left\{\rho \,/\, \rho = \frac{\kappa}{\nu}, \kappa \in Z, \nu \in Z \ \nu \neq 0\right\}$

4) Οι **άρρητοι** αριθμοί : $Q' = \{$οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί$\}$
π.χ. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π=3,14...

5) Οι **πραγματικοί** αριθμοί : $\Re = Q \cup Q'$

- Τα διαστήματα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών , ορίζονται ως εξής :
  - **i)** Κλειστό διάστημα [α,β] είναι το σύνολο των αριθμών x με $\alpha \leq x \leq \beta$
  - **ii)** Ανοικτό διάστημα (α,β) είναι το σύνολο των αριθμών x με $\alpha < x < \beta$
  - **iii)** Το ανοικτό δεξιά διάστημα [α,β) είναι το σύνολο των αριθμών x με $\alpha \leq x < \beta$
  - **iv)** Το ανοικτό αριστερά διάστημα (α,β] είναι το σύνολο των αριθμών x με $\alpha < x \leq \beta$
  - **v)** Διάστημα (α,+∞) ή [α,+∞) είναι το σύνολο των αριθμών x με $x > \alpha$ ή $x \geq \alpha$ αντίστοιχα .
  - **vi)** Διάστημα (−∞,α) ή (−∞,α] είναι το σύνολο των αριθμών x με $x < \alpha$ ή $x \leq \alpha$ αντίστοιχα .

2) ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

Αναλογία λέγεται κάθε ισότητα κλασμάτων και έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες :

1) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$

2) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ και $\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$

3) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta}$

4) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{\gamma - \delta}{\gamma + \delta}$

5) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$

3) ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες των δυνάμεων :

- Αν α πραγματικός αριθμός και ν φυσικός , τότε ορίζουμε :

$$\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}} \ (\nu \geq 2) \quad , \quad \alpha^{1} = \alpha \quad , \quad \alpha^{0} = 1 \ (\alpha \neq 0) \quad , \quad \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}} \ (\alpha \neq 0)$$

- **i)** Αν ν περιττός , τότε : $\alpha^{\nu} = \beta^{\nu} \Leftrightarrow \alpha = \beta$
  ii) Αν ν άρτιος , τότε : $\alpha^{\nu} = \beta^{\nu} \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$

- Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

  1) $\alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa+\lambda}$ **3)** $\alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa} = (\alpha \cdot \beta)^{\kappa}$ **5)** $\left(\alpha^{\kappa}\right)^{\lambda} = \alpha^{\kappa \cdot \lambda}$

  2) $\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}} = \alpha^{\kappa-\lambda}$ **4)** $\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$

4) ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών .

Είναι γνωστές οι παρακάτω ταυτότητες :

1) $(\alpha+\beta)^{2} = \alpha^{2}+2\alpha\beta+\beta^{2}$

2) $(\alpha-\beta)^{2} = \alpha^{2}-2\alpha\beta+\beta^{2}$

3) $\alpha^{2}-\beta^{2} = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

4) $(\alpha+\beta+\gamma)^{2} = \alpha^{2}+\beta^{2}+\gamma^{2}+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$

5) $(\alpha+\beta)^{3} = \alpha^{3}+3\alpha^{2}\beta+3\alpha\beta^{2}+\beta^{3}$

6) $(\alpha-\beta)^{3} = \alpha^{3}-3\alpha^{2}\beta+3\alpha\beta^{2}-\beta^{3}$

7) $\alpha^{3}+\beta^{3} = (\alpha+\beta)(\alpha^{2}-\alpha\beta+\beta^{2})$

8) $\alpha^{3}-\beta^{3} = (\alpha-\beta)(\alpha^{2}+\alpha\beta+\beta^{2})$

9) $(x+\alpha)(x+\beta) = x^{2}+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

10) $\alpha^{\nu}-\beta^{\nu} = (\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^{2}+\ldots+\alpha^{2}\beta^{\nu-3}+\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1})$

5) ΔΙΑΤΑΞΗ ΣΤΟ $\Re$

Για δύο πραγματικούς αριθμούς α,β ορίζουμε :

$$\boldsymbol{\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta>0 \qquad \text{και} \qquad \alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta<0}$$

Για τις ανισότητες έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες :

1) Αν $\alpha>0$ και $\beta>0$, τότε $\alpha+\beta>0$

2) Αν $\alpha<0$ και $\beta<0$, τότε $\alpha+\beta<0$

3) Αν α,β ομόσημοι , τότε $\alpha \cdot \beta > 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} > 0$

4) Αν α,β ετερόσημοι , τότε $\alpha \cdot \beta < 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} < 0$

5) Για κάθε αριθμό α ισχύει : $\alpha^2 \geq 0$ ($\alpha^2 = 0$ μόνο όταν $\alpha = 0$)

6) Μεταβατική ιδιότητα : αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$

7) Πρόσθεση – Αφαίρεση στα μέλη μιας ανισότητας : $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \pm \gamma > \beta \pm \gamma$

8) Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση στα μέλη μιας ανισότητας :

i) Αν $\gamma > 0$, τότε : $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$, $\alpha > \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$

ii) Αν $\gamma < 0$, τότε : $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$, $\alpha > \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$

9) Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$

10) Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ και $\alpha > \beta$, $\gamma > \delta$, τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

Προσοχή : Δεν μπορούμε να διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη ! ! !

11) Αν $\alpha, \beta > 0$ και ν φυσικός$\neq 0$ ισχύει : $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$ και $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$

12) Αν α,β ομόσημοι , τότε : $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$

6) ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

- Ορισμός : $|\alpha| = \begin{cases} \alpha & , \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha & , \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$

- Οι ιδιότητες των απολύτων τιμών είναι οι εξής :

  1) $|\alpha| \geq 0$

  2) $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$

  3) $|\alpha|^2 = \alpha^2$. Γενικότερα ισχύει : $|\alpha|^{2\nu} = \alpha^{2\nu}$ και $|\alpha|^{2\nu+1} = \begin{cases} \alpha^{2\nu+1} & , \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha^{2\nu+1} & , \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$

  4) Αν $\theta > 0$, τότε : $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$

  5) $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$

  6) Αν $\theta > 0$, τότε : $\begin{cases} |x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta \\ |x| \geq \theta \Leftrightarrow x \leq -\theta \text{ ή } x \geq \theta \end{cases}$

- Για το άθροισμα , το γινόμενο και το πηλίκο δύο πραγματικών αριθμών ισχύουν οι εξής ιδιότητες :

  1) $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ **2)** $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ **3)** $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ **4)** $\big||\alpha| - |\beta|\big| \leq |\alpha + \beta|$

7) ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ

Απόσταση δύο αριθμών α,β ονομάζεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που περικλείεται από τους αριθμούς α,β στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Συμβολίζεται με **d(α,β)** ή με **d(β,α)**, δηλαδή ισχύει :

$$\mathbf{d(\alpha,\beta) = |\alpha-\beta|}$$

8) ΡΙΖΕΣ

- Ορισμοί : $\sqrt{\alpha}=\beta \Leftrightarrow \beta^2=\alpha$, $\sqrt[\nu]{\alpha}=\beta \Leftrightarrow \beta^\nu=\alpha$ ($\alpha,\beta\geq 0$ και $\nu\in \mathbb{N}^*$)
- Για τις ρίζες ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες :

1) Αν $\alpha\geq 0$ τότε : $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu=\alpha$

- Αν ο ν είναι άρτιος, τότε η $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}$ ορίζεται για κάθε α και είναι $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=|\alpha|$ π.χ. $\sqrt[4]{(-2)^4}=|-2|=2$
- Αν ο ν είναι περιττός, τότε η $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}$ ορίζεται μόνο για $\alpha\geq 0$ και είναι $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=\alpha$ π.χ. $\sqrt[5]{3^5}=3$

2) Αν $\alpha,\beta\geq 0$ τότε : **i)** $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$ **ii)** $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ $(\beta\neq 0)$

3) Αν $\alpha>\beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha}>\sqrt[\nu]{\beta}$

4) Αν $\alpha,\beta\geq 0$ και κ θετικός ακέραιος, τότε : **i)** $\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa}=\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\kappa$ **ii)** $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\cdot\beta}=\alpha\cdot\sqrt[\nu]{\beta}$

5) Αν $\alpha\geq 0$ τότε : **i)** $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}=\sqrt[\mu\cdot\nu]{\alpha}$ **ii)** $\sqrt[\nu\cdot\rho]{\alpha^{\mu\cdot\rho}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

6) Αν $\alpha>0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε : $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

Επιπλέον, αν μ,ν θετικοί ακέραιοι ορίζουμε : $0^{\frac{\mu}{\nu}}=0$

9) ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

- Ορισμός : $\log_\alpha\theta=x \Leftrightarrow \alpha^x=\theta$
- Για τους λογάριθμους ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες :

1) $\log_\alpha\alpha^x=x$ **2)** $\alpha^{\log_\alpha\theta}=\theta$ **3)** $\log_\alpha 1=0$ **4)** $\log_\alpha\alpha=1$

5) $\log_\alpha(\theta_1\cdot\theta_2)=\log_\alpha\theta_1+\log_\alpha\theta_2$ **6)** $\log_\alpha(\theta_1:\theta_2)=\log_\alpha\theta_1-\log_\alpha\theta_2$

7) $\log_\alpha\theta^\kappa=\kappa\cdot\log_\alpha\theta$ **8)** $\log_\alpha\sqrt[\kappa]{x}=\dfrac{1}{\kappa}\log_\alpha x$

9) Τύπος αλλαγής βάσης : $\log_\beta\theta=\dfrac{\log_\alpha\theta}{\log_\alpha\beta}$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1) ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Έχουν τη μορφή : **αx+β=0** και η διερεύνησή τους είναι η εξής :

- **Αν α≠0** , η εξίσωση έχει μοναδική λύση την : $\alpha x=-\beta \Leftrightarrow x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$
- **Αν α=0 και β≠0** , η εξίσωση είναι αδύνατη *(δηλαδή δεν έχει λύση)* .
- **Αν α=0 και β=0** , η εξίσωση είναι ταυτότητα ή αόριστη *(δηλαδή αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x)* .

➤ Αν η εξίσωση δίνεται σε άλλη μορφή τότε την ανάγουμε στη μορφή αx+β=0 με απαλοιφή παρονομαστών - εκτέλεση πράξεων - χωρισμό γνωστών από αγνώστους ή αναγωγή ομοίων όρων .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

1) $9(8-x)-10(9-x)-4(x-1) = 1-8x \Leftrightarrow 72-9x-90+10x-4x+4 = 1-8x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -9x+10x-4x+8x = -72+90-4+1 \Leftrightarrow 5x = 15 \Leftrightarrow x = \dfrac{15}{5} \Leftrightarrow x = 3$

2) $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-6}{x+2} = 2$ Πρέπει : $(x-1)\cdot(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \neq 0 \text{ και} \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \text{ και} \\ x \neq -2 \end{cases}$

$\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-6}{x+2} = 2 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(x+2)\dfrac{x+1}{x-1} + (x-1)\cdot(x+2)\dfrac{x-6}{x+2} = 2(x-1)\cdot(x+2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+2)\cdot(x+1) + (x-1)\cdot(x-6) = 2(x-1)\cdot(x+2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+x+2x+2+x^2-6x-x+6 = 2(x^2+2x-x-2) \Leftrightarrow 2x^2-4x+8 = 2x^2+4x-2x-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x+8 = 2x-4 \Leftrightarrow -4x-2x = -4-8 \Leftrightarrow -6x = -12 \Leftrightarrow 6x = 12 \Leftrightarrow x = \dfrac{12}{6} \Leftrightarrow x = 2$

2) ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

Οι μορφές που μπορεί να συναντήσουμε είναι : $|f(x)| = \alpha$ (1) ή $|f(x)| = |g(x)|$ (2) ή εξισώσεις με δύο απόλυτα αλλά όχι της μορφής $|f(x)| = |g(x)|$ ή με περισσότερα από δύο απόλυτα .

➤ Για τη λύση της (1) έχουμε : $\begin{cases} \text{Αν } \alpha<0 \text{, τότε η (1) είναι αδύνατη} \\ \text{Αν } \alpha\geq 0 \text{, τότε : (1)} \Leftrightarrow f(x)=\alpha \text{ ή } f(x)=-\alpha \text{ . . .} \end{cases}$

Για τη λύση της (2) έχουμε : $(2) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$

Για τις εξισώσεις που έχουν δύο απόλυτα αλλά δεν είναι της μορφής $|f(x)|=|g(x)|$ ή που έχουν περισσότερα από δύο απόλυτα συντάσσουμε πίνακα προσήμου των απολύτων και εξετάζοντας κάθε διάστημα χωριστά βρίσκουμε τις λύσεις της εξίσωσης .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

1) $|x-1|=|2x+3| \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2x+3 & ή \\ x-1=-2x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2x=3+1 & ή \\ x+2x=-3+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x=4 & ή \\ 3x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 & ή \\ x=-\frac{2}{3} \end{cases}$

2) $|x+2|-2|x-1|=1$

x	$-\infty$ -2 1 $+\infty$		
x+2	− 0	+	+
x-1	−	− 0	+

i) Αν $x\in(-\infty,-2)$ η εξίσωση γράφεται : $-(x+2)+2(x-1)=1 \Leftrightarrow -x-2+2x-2=1 \Leftrightarrow x=5$ που απορρίπτεται αφού $x\in(-\infty,-2)$

ii) Αν $x\in[-2,1)$ η εξίσωση γράφεται : $(x+2)+2(x-1)=1 \Leftrightarrow x+2+2x-2=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ (δεκτή)

iii) Αν $x\in[1,+\infty)$ η εξίσωση γράφεται : $x+2-2x+2=1 \Leftrightarrow x=3$ (δεκτή)

3) ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

Έχουν τη μορφή : $\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0}$ και για τη λύση τους έχουμε :

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$	**Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq0$**
αν $\Delta>0$	έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
αν $\Delta=0$	έχει μία ρίζα διπλή την $x_{1,2}=-\frac{\beta}{2\alpha}$
αν $\Delta<0$	δεν έχει πραγματικές ρίζες

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

1) $x^2-3x+2=0$ Είναι : $\Delta=9-8=1>0$, έχει δύο ρίζες τις $x_1=\frac{-(-3)\pm1}{2}=\left\langle\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right.$

2) $x^2+10x+25=0$ Είναι : $\Delta=100-100=0$, έχει μία ρίζα διπλή την $x_{1,2}=\frac{-10}{2}=-5$

3) $(x-2)^2+3x=2 \Leftrightarrow x^2-2x+4+3x-2=0 \Leftrightarrow x^2+x+2=0$ Είναι : $\Delta=1-8=-7<0$, αδύνατη

<u>Σημείωση :</u> Όταν β=0 ή γ=0 , τότε η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ λύνεται πιο εύκολα χωρίς τη χρήση της διακρίνουσας .

- Αν $\gamma=0$, κάνουμε παραγοντοποίηση .

  π.χ. $5x^2-2x = 0 \Leftrightarrow x\,(5x-2) = 0 \Leftrightarrow x=0$ ή $5x-2=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=\dfrac{2}{5}$

- Αν $\beta=0$, λύνουμε την εξίσωση ως προς x^2

  π.χ. $2x^2-8 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = \pm 2$

4) ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Έχουν τη μορφή : $\mathbf{\alpha x^4+\beta x^2+\gamma = 0\ ,\ \alpha\neq 0}$ και λύνονται με την αντικατάσταση : $x^2= y$, $y \geq 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η εξίσωση : $x^4-5x^2+4 = 0$

Θέτουμε $x^2= y$, $y \geq 0$. Οπότε η εξίσωση γίνεται : $y^2-5y+4 = 0$ με

$\Delta = 25-16 = 9$ και $y_{1,2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} \Leftrightarrow y_1 = 4$ και $y_2 = 1$ (δεκτές)

Αντικαθιστώντας στον μετασχηματισμό , έχουμε : $\begin{cases} x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1 \\ x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -2 \end{cases}$

, οπότε οι ρίζες της εξίσωσης είναι : $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$ και $x_4 = -2$.

5) ΔΙΩΝΥΜΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Έχουν τη μορφή : $\mathbf{x^\nu = \alpha}$ ($\nu\in N^*$, $\alpha\in\Re$) . Οι λύσεις της εξίσωσης είναι :

α>0	ν περιττός	έχει ακριβώς μια λύση : $x^\nu = \alpha \Leftrightarrow x = \sqrt[\nu]{\alpha}$
	ν άρτιος	έχει ακριβώς δύο λύσεις : $x^\nu = \alpha \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[\nu]{\alpha}$
α<0	ν περιττός	έχει ακριβώς μια λύση : $x^\nu = \alpha \Leftrightarrow x = -\sqrt[\nu]{-\alpha}$
	ν άρτιος	δεν έχει λύσεις (αδύνατη)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

1) $x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = -2$

2) $x^6 = -3$ αδύνατη

3) $x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή} \\ x^2-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή} \\ x = \sqrt{1} \text{ ή } x = -\sqrt{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή} \\ x = \pm 1 \end{cases}$

4) $2x^7 - x = 0 \Leftrightarrow x\left(2x^6-1\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή} \\ 2x^6-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή} \\ x^6 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή} \\ x = \sqrt[6]{\dfrac{1}{2}} \text{ ή } x = -\sqrt[6]{\dfrac{1}{2}} \end{cases}$

6) ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΒΑΘΜΟΥ ν≥3

Μια πολυωνυμική εξίσωση βαθμού ≥ 3 λύνεται με τους εξής τρόπους :

➤ **Με παραγοντοποίηση**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η εξίσωση : $x^7+x^4-x^3-1=0$

$$x^7+x^4-x^3-1=0 \Leftrightarrow x^4(x^3+1)-(x^3+1)=0 \Leftrightarrow (x^3+1)(x^4-1)=0 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^3+1=0 \\ \text{ή } x^4-1=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^3=-1 \\ \text{ή } x^4=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-1 \\ \text{ή } x=\pm 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x=-1 \\ \text{ή } x=1 \end{array}$$

➤ **Με σχήμα Horner**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η εξίσωση : $x^3-3x^2+x+1=0$

Οι διαιρέτες του σταθερού όρου της εξίσωσης είναι : +1 , –1 .
Για x=1 έχουμε : $1^3-3\cdot 1^2+1+1=1-3+1+1=0$. Άρα το 1 είναι ρίζα . Οπότε :

1	−3	1	1	ρ=1
	1	−2	−1	
1	−2	−1	0	

Άρα : $x^3-3x^2+x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-1)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=1 \\ \text{ή } x^2-2x-1=0\ (\Delta=8) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ \text{ή } x=1+\sqrt{2} \\ \text{ή } x=1-\sqrt{2} \end{array}$$

➤ **Αν η εξίσωση δίνεται σε άλλη μορφή** (π.χ. κλασματική , άρρητη , τριγωνομετρική κ.τ.λ.) τότε την ανάγουμε σε πολυωνυμική με απαλοιφή παρονομαστών ή ύψωση στην κατάλληλη δύναμη ή θέτοντας τον κατάλληλο μετασχηματισμό.

7) ΑΡΡΗΤΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Είναι οι εξισώσεις που περιέχουν μια τουλάχιστον ρίζα .

➤ Για τη λύση τους βάζουμε περιορισμούς , υψώνουμε διαδοχικά σε κατάλλη-λες δυνάμεις μέχρι να οδηγηθούμε σε εξίσωση , την οποία λύνουμε και προσδιορίζουμε τις ρίζες της . Τέλος ελέγχουμε αν οι ρίζες ικανοποιούν τους περιορισμούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η εξίσωση : $\sqrt{2+\sqrt{x+3}}=2$

$$\text{Πρέπει : } \left.\begin{array}{l} x+3\ge 0 \\ 2+\sqrt{x+3}\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x\ge -3 \\ \text{ισχύει πάντα ως άθροισμα θετικών} \end{array}\right\} \Rightarrow x\ge -3$$

$$\text{Οπότε : } \sqrt{2+\sqrt{x+3}}=2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2+\sqrt{x+3}}\right)^2=2^2 \Leftrightarrow 2+\sqrt{x+3}=4 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}=4-2 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3}\right)^2=2^2 \Leftrightarrow x+3=4 \Leftrightarrow x=4-3 \Leftrightarrow x=-1$$

που είναι δεκτή , αφού ικανοποιεί τον περιορισμό .

8) ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Οι μορφές που μπορεί να συναντήσουμε είναι :

➤ $\boldsymbol{\alpha^{f(x)} = \beta^{g(x)}}$. Γράφουμε το β σε δύναμη με βάση το α (αν γίνεται) ή λογαριθμίζουμε και τα δύο μέλη .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

1) $2^{x^2-3x} = 4^{x-2} \Leftrightarrow 2^{x^2-3x} = 2^{2(x-2)} \Leftrightarrow 2^{x^2-3x} = 2^{2x-4} \Leftrightarrow x^2-3x = 2x-4 \Leftrightarrow x^2-5x+4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ ή} \\ x=4 \end{cases}$

2) $2^{2x-3} = 3^x \Leftrightarrow \log_2 2^{2x-3} = \log_2 3^x \Leftrightarrow 2x-3 = x\log_2 3 \Leftrightarrow 2x - x\log_2 3 = 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x\left(2-\log_2 3\right) = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2-\log_2 3}$$

➤ $\boldsymbol{f(\alpha^x) = g(\alpha^x)}$. Θέτουμε $\alpha^x = y > 0$ και καταλήγουμε σε απλή εξίσωση με άγνωστο το y .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η εξίσωση : $3^{x+3}+5\cdot 3^{x+1}+3^x-3^{x-1} = 128$

$$3^{x+3}+5\cdot 3^{x+1}+3^x-3^{x-1} = 128 \Leftrightarrow 3^x\cdot 3^3+5\cdot 3^x\cdot 3+3^x-\frac{3^x}{3} = 128 \Leftrightarrow 27\cdot 3^x+15\cdot 3^x+3^x-\frac{3^x}{3} = 128$$

Θέτουμε $3^x = y$ και έχουμε : $27y+15y+y-\frac{y}{3} = 128 \Leftrightarrow 43y-\frac{y}{3} = 128 \Leftrightarrow \frac{128}{3}y = 128 \Leftrightarrow y = 3$

Αντικαθιστούμε στο μετασχηματισμό και έχουμε : $3^x = 3 \Leftrightarrow 3^x = 3^1 \Leftrightarrow x = 1$

➤ $\boldsymbol{f(\alpha^x) = g(\beta^x)}$. Δημιουργούμε τη δύναμη $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x$, οπότε αναγόμαστε στη προηγούμενη μορφή .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η εξίσωση : $3\cdot 2^{x-4}-2^{x-1} = 5^{x-2}-6\cdot 5^{x-3}$

$$3\cdot 2^{x-4}-2^{x-1} = 5^{x-2}-6\cdot 5^{x-3} \Leftrightarrow 3\frac{2^x}{2^4}-\frac{2^x}{2} = \frac{5^x}{5^2}-6\frac{5^x}{5^3} \Leftrightarrow 2^x\left(\frac{3}{16}-\frac{1}{2}\right) = 5^x\left(\frac{1}{25}-\frac{6}{125}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{16}{625} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^4 \Leftrightarrow x = 4$$

9) ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Για να λύσουμε λογαριθμικές εξισώσεις βάζουμε περιορισμούς *(λογαριθμίσιμες ποσότητες > 0)* και εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων γράφουμε συνήθως την εξίσωση στη μορφή $\log_\alpha f(x) = \log_\alpha g(x)$ απ΄ όπου προκύπτει $f(x) = g(x)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η εξίσωση : $\log_5(3x+2)-\log_5(x+1) = \log_5 2$

Πρέπει : $3x+2>0 \Leftrightarrow x>-\frac{2}{3}$ και $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$, οπότε τελικά : $x>-\frac{2}{3}$ και συνεπώς

$$\log_5(3x+2)-\log_5(x+1) = \log_5 2 \Leftrightarrow \log_5\frac{3x+2}{x+1} = \log_5 2 \Leftrightarrow \frac{3x+2}{x+1} = 2 \Leftrightarrow 3x+2 = 2x+1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ δεκτή}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $(x+1)(x^2-4)=(x-2)(x+1)^2$

ii) $(x-1)^3+1-x^2=0$

iii) $\dfrac{2x+7}{4}-\dfrac{2x+5}{3}=\dfrac{2-x}{4}-\dfrac{2+x}{2}$

iv) $\dfrac{2x+1}{x^2-x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{(x-1)^2}$

v) $2x-\left(\dfrac{15}{9}x-5\right)=\dfrac{x-6}{3}+7$

vi) $(x-2)^2-x(x-4)=1-x$

vii) $x(\lambda^2+1)+3=4(\lambda-x)-\lambda^2 x$

viii) $\lambda^2 x=\lambda(x+2)-2$

2) Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $|3x-1|=2|x+1|$

ii) $|x+2|+|x-2|=|3x-1|$

iii) $|x+4|+|x-2|-2|x|=2$

iv) $2|x+3|-5|x-1|=0$

v) $\dfrac{|x|+1}{|x|-x}=3$

vi) $\dfrac{2x^2+|x|}{4|x|-3x^2}=\dfrac{5}{11}$

3) Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $2x^2-18=0$

ii) $x^2+3x=0$

iii) $2x^2-5x+4=0$

iv) $x^2+x+3=0$

v) $(3x-1)(2x+1)=6$

vi) $\left(2x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(3x-\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{19}{16}$

vii) $(2x-1)^2-3(2x-1)=0$

viii) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{x}{2}=-\dfrac{1}{6}$

4) Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $\dfrac{2}{x^2-4}-\dfrac{1}{x^2-2x}+\dfrac{x-4}{x^2+2x}=0$

ii) $\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{x^2+1}{x}=\dfrac{89x}{72}$

iii) $x^4+x^2-20=0$

iv) $18x^4-11x^2+1=0$

5) Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $x^4-27x=0$

ii) $3x^5+2x=0$

iii) $x^3=64$

iv) $x^5=-32$

v) $x^4=-2$

vi) $2x^3=\dfrac{x}{2}$

6) Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $6x^3 - x^2 + 2x - 3 = 0$

ii) $4x^4 + 12x^3 + 3x^2 - 9x - 10 = 0$

iii) $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x + 3 = 0$

iv) $3x^3 - 8x^2 - 16x + 16 = 0$

v) $2x^4 + 5x^3 - 5x - 2 = 0$

vi) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$

vii) $2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 3x - 2 = 0$

viii) $(2x+1)^6 + 9(2x+1)^3 + 8 = 0$

7) Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $\dfrac{3(x^2+1)}{2-x} + x = \dfrac{9}{2x^2 - x^3} - 2$

ii) $\dfrac{x^2+1}{x^2} - \dfrac{1}{(x-1)^2} = 0$

iii) $\sqrt[3]{x+3} = x - 3$

iv) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x} = 1$

v) $\sqrt[4]{8x^2 - 1} = 2x$

vi) $2ημ^3 x + ημ^2 x + 5ημx - 3 = 0$

8) Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $\sqrt{2x-1} = 3$

ii) $\sqrt{3x+1} = \sqrt{x-2}$

iii) $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x+2} = 0$

iv) $3 - 2\sqrt{2x+1} = 0$

v) $\sqrt{5x-2} = 2\sqrt{1-x}$

vi) $\sqrt{x} = x$

vii) $\sqrt[3]{x^2} = \sqrt{x}$

viii) $\sqrt{\sqrt{x} - 1} = 1$

ix) $\sqrt{2-3x} = λ - 1$

9) Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $4^{x^2-5x+11} = 1024$

ii) $3^x + 3^{-x} = \dfrac{10}{3}$

iii) $7 \cdot 3^{2x-1} + 2 \cdot 9^{2x-3} = 207$

iv) $5^{1-x} - 2 \cdot 5^{-x} + 4 \cdot 5^{2-x} = 515$

v) $2 \cdot 4^x + 3 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$

vi) $3^{x+1} - 2^x = 3^{x-1} + 2^{x+3}$

10) Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $x \log 5 - \log(1+2^x) = x - \log 6$

ii) $\log(2x-7) + \log(3x+4) = \log 16$

iii) $\log(4x-1) - 2\log 2 = \log(x^2 - 1)$

iv) $\log_5(2^x + 6 \cdot 2^{-x}) = 1$

v) $\log(x+1) + 2\log\sqrt{5x} = 2$

vi) $3^{\log x} + 3^{2-\log x} = 10$

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1) ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Έχουν τη μορφή : **αx+β > 0** (1) ή **αx+β < 0** και η διερεύνησή τους είναι η εξής :

- **Αν α>0** η (1) δίνει : $x > -\frac{\beta}{\alpha}$ (διαιρούμε με το α>0)
- **Αν α<0** η (1) δίνει : $x < -\frac{\beta}{\alpha}$ (διαιρούμε με το α<0)
- **Αν α=0** η (1) γράφεται : $0x > -\beta$ και
  - αληθεύει για κάθε τιμή του x , αν β>0
  - είναι αδύνατη αν $\beta \leq 0$
- Ομοίως εργαζόμαστε και για την ανίσωση αx+β<0

➤ Αν η ανίσωση δίνεται σε άλλη μορφή τότε την ανάγουμε στη μορφή αx+β>0 (ή αx+β<0) με εκτέλεση πράξεων - χωρισμό γνωστών από αγνώ-στους ή αναγωγή ομοίων όρων .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η ανίσωση : $4(y+1)^2-(y+3)^2 < 3(y-2)^2$

$$4(y+1)^2-(y+3)^2 < 3(y-2)^2 \Leftrightarrow 4(y^2+2y+1)-(y^2+6y+9) < 3(y^2-4y+4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y^2+8y+4-y^2-6y-9 < 3y^2-12y+12 \Leftrightarrow 3y^2+2y-5 < 3y^2-12y+12 \Leftrightarrow 14y < 17 \Leftrightarrow y < \frac{17}{14}$$

2) ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

Οι μορφές που μπορεί να συναντήσουμε είναι : $|f(x)| < \alpha$ (1) ή $|f(x)| > \alpha$ (2) ή $|f(x)| < |g(x)|$ (3) ή ανισώσεις με δύο απόλυτα αλλά όχι της μορφής $|f(x)| < |g(x)|$ ή με περισσότερα από δύο απόλυτα .

➤ Για τη λύση της (1) έχουμε : $\begin{cases} \text{Αν } \alpha\leq 0 \text{, τότε η (1) είναι αδύνατη} \\ \text{Αν } \alpha>0 \text{, τότε : (1)} \Leftrightarrow -\alpha < f(x) < \alpha \end{cases}$

Για τη λύση της (2) έχουμε : $\begin{cases} \text{Αν } \alpha<0 \text{, τότε η (1) είναι ταυτότητα} \\ \text{Αν } \alpha>0 \text{, τότε : (1)} \Leftrightarrow f(x) > \alpha \text{ ή } f(x) < -\alpha \end{cases}$

Για τη λύση της (3) έχουμε : $|f(x)|^2 < |g(x)|^2 \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x) \Leftrightarrow \ldots$

Για τις ανισώσεις που έχουν δύο απόλυτα αλλά δεν είναι της μορφής $|f(x)|<|g(x)|$ ή που έχουν περισσότερα από δύο απόλυτα συντάσσουμε πίνακα προσήμου των απολύτων και εξετάζοντας κάθε διάστημα χωριστά συναληθεύουμε τις λύσεις . Τέλος η λύση της ανίσωσης είναι η ένωση των επιμέρους συναληθεύσεων .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

1) $|x-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -2+1 < x < 2+1 \Leftrightarrow -1 < x < 3$

2) $|x+2| > 3 \Leftrightarrow x+2 < -3$ ή $x+2 > 3 \Leftrightarrow x < -5$ ή $x > 1$

3) $|2x+1| > 2\,|x+3| \Leftrightarrow |2x+1|^2 > 4\,|x+3|^2 \Leftrightarrow (2x+1)^2 > 4\,(x+3)^2 \Leftrightarrow 4x^2 -4x +1 \le 4\left(x^2 +6x +9\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2 -4x +1 \le 4x^2 +24x +36 \Leftrightarrow -4x-24x \le 36-1 \Leftrightarrow -28x \le 35 \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{35}{28} \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{7}{4}$

4) $-3|x+2|+|x-1| < x-3$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	

i) Αν $x\in(-\infty\,,-2)$ η ανίσωση γράφεται :
$3(x+2)-(x-1) < x-3 \Leftrightarrow 3x+6-x+1 < x-3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x-x-x < -3-6-1 \Leftrightarrow x < -10$, οπότε
συναληθεύοντας παίρνουμε : $x\in(-\infty\,,-10)$

ii) Αν $x\in[-2\,,1]$ η ανίσωση γράφεται :

$-3(x+2)-(x-1) < x-3 \Leftrightarrow -3x-6-x+1 < x-3 \Leftrightarrow -3x-x-x < -3+6-1 \Leftrightarrow -5x < 2 \Leftrightarrow x > -\dfrac{2}{5}$

, οπότε συναληθεύοντας παίρνουμε : $x\in\left(-\dfrac{2}{5}\,,1\right]$

iii) Αν $x\in(1\,,+\infty)$ η ανίσωση γράφεται :

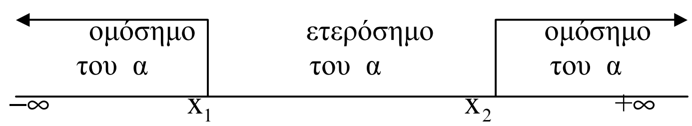
$-3(x+2)+(x-1) < x-3 \Leftrightarrow -3x-6+x-1 < x-3 \Leftrightarrow -3x+x-x < -3+6+1 \Leftrightarrow -3x < 4 \Leftrightarrow x > -\dfrac{4}{3}$

, οπότε συναληθεύοντας παίρνουμε : $x\in(1\,,+\infty)$

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης είναι : $x\in(-\infty\,,-10)$ ή $x\in\left(-\dfrac{2}{5}\,,1\right]$ ή $x\in(1\,,+\infty)$

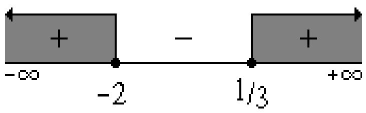
, δηλαδή τελικά : $x\in(-\infty\,,-10)$ ή $x\in\left(-\dfrac{2}{5}\,,+\infty\right)$

3) ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

<table>
<tr><th>$\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma$</th><th>Το πρόσημο του τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$ είναι :</th></tr>
<tr><td>αν $\Delta > 0$</td><td>ομόσημο του α εκτός των ριζών και ετερόσημο του α εντός των ριζών

</td></tr>
<tr><td>αν $\Delta = 0$</td><td>ομόσημο του α για κάθε $x\in\Re-\{ρίζα\}$</td></tr>
<tr><td>αν $\Delta < 0$</td><td>ομόσημο του α για κάθε $x\in\Re$</td></tr>
</table>

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

1) $3x^2+5x-2 \geq 0$ Είναι : $\Delta = 25+24 = 49$ και $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm 7}{6} \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{1}{3}$ και $x_2 = -2$, οπότε :



Άρα : $x \in (-\infty, -2] \cup \left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$

2) $x^2+2x+1 > 0$ Είναι : $\Delta = 4-4 = 0$ και $x_{1,2} = \dfrac{-2}{2} = -1$, οπότε το τριώνυμο είναι θετικό *(αφού α>0)* για κάθε $x \in \Re - \{-1\}$. Άρα τελικά $x \in \Re - \{-1\}$ ή $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

3) $x^2-2x+1 \leq 0$ Είναι : $\Delta = 4-4 = 0$ και $x_{1,2} = -\dfrac{-2}{2} = 1$, οπότε το τριώνυμο είναι θετικό *(αφού α>0)* για κάθε $x \in \Re - \{1\}$. Άρα η ανίσωση αληθεύει μόνο για $x = 1$, όπου ισχύει το ίσον .

4) ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΒΑΘΜΟΥ ν≥3

➤ Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος , αναλύουμε σε γινόμενο το 1ο μέλος (με παραγοντοποίηση ή σχήμα Horner) και κάνουμε πίνακα προσήμου γινομένου . Τέλος βρίσκουμε τα κατάλληλα διαστήματα .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η ανίσωση : $2x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x \leq 0$

$2x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x \leq 0 \Leftrightarrow x\left(2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1\right) \Leftrightarrow$ με σχήμα Horner $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\,(x-1)\,(x^2-x+1)\,(2x+1) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)\,(x^2-x+1)\,(2x^2+x) \leq 0$

- Για το τριώνυμο x^2-x+1 είναι : $\Delta = 1-4 = -3 < 0$, οπότε επειδή $\alpha = 1 > 0$ ισχύει $x^2-x+1 > 0$ για κάθε $x \in \Re$.
- $2x+1 = 0 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$
- Τέλος : $x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Οπότε κάνοντας τον πίνακα προσήμου γινομένου , σύμφωνα με τα παραπάνω , έχουμε :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$x-1$		−		−		−	0	+	
x^2-x+1		+		+		+		+	
$2x^2+x$		+	0	−	0	+		+	
$P(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

Όπως φαίνεται και από τον διπλα-νό πίνακα η ανίσωση : $2x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x \leq 0$ αληθεύει όταν $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right] \cup [0,1]$.

5) ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Υπάρχουν δύο μορφές στις κλασματικές ανισώσεις :

➤ **Της μορφής :** $\mathbf{\frac{A(x)}{B(x)}>0}$ ή $\mathbf{\frac{A(x)}{B(x)}<0}$ που γράφεται ισοδύναμα $A(x)\cdot B(x)>0$ ή $A(x)\cdot B(x)<0$ (όπου $B(x)\neq 0$) και αυτό γιατί το πηλίκο και το γινόμενο δύο αριθμών έχουν το ίδιο πρόσημο .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η ανίσωση : $\frac{x^2-10x+21}{x^2-5x+4}<0$

Η ανίσωση γράφεται : $\frac{x^2-10x+21}{x^2-5x+4}<0 \Leftrightarrow \left(x^2-10x+21\right)\left(x^2-5x+4\right)<0$

- Για το τριώνυμο $x^2-10x+21$ είναι : $\Delta=100-84=16$, οπότε $x_{1,2}=\frac{10\pm 4}{2}\Leftrightarrow x_1=7$ και $x_2=3$
- Για το τριώνυμο x^2-5x+4 είναι : $\Delta=25-16=9$, οπότε $x_{1,2}=\frac{5\pm 3}{2}\Leftrightarrow x_1=4$ και $x_2=1$

Οπότε κάνοντας τον πίνακα προσήμου γινομένου , έχουμε :

x	$-\infty$	1		3		4		7	$+\infty$
$x^2-10x+21$	+		+	0	−		−	0	+
x^2-5x+4	+	0	−		−	0	+		+
Γινόμενο	+		−		+		−		+

Άρα τελικά : $x\in(1,3)\cup(4,7)$

➤ **Της μορφής :** $\mathbf{\frac{A(x)}{B(x)}>\Gamma(x)}$ γράφεται : $\frac{A(x)}{B(x)}-\Gamma(x)>0 \Leftrightarrow \frac{A(x)-B(x)\cdot\Gamma(x)}{B(x)}>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[A(x)-B(x)\cdot\Gamma(x)\right]\cdot B(x)>0$ και λύνεται όπως η προηγούμενη περίπτωση .

Δηλαδή μεταφέρουμε το $\Gamma(x)$ στο πρώτο μέλος τα κάνουμε ομώνυμα και αναγόμαστε σε γνωστή μορφή .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η ανίσωση : $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}\leq\frac{8}{x^2-1}$

Η ανίσωση γράφεται : $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}\leq\frac{8}{x^2-1}\Leftrightarrow\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}-\frac{8}{x^2-1}\leq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}-\frac{8}{(x-1)(x+1)}\leq 0\Leftrightarrow\frac{x(x+1)-2(x-1)-8}{(x-1)(x+1)}\leq 0\Leftrightarrow\frac{x^2+x-2x+2-8}{x^2-1}\leq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{x^2-x-6}{x^2-1}\leq 0\Leftrightarrow\left(x^2-x-6\right)\left(x^2-1\right)\leq 0$

- Για το τριώνυμο x^2-x-6 είναι : $\Delta = 1+24 = 25$, οπότε $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x_1 = 3$ και $x_2 = -2$
- $x^2-1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\,(x+1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ και $x_2 = -1$

Οπότε κάνοντας τον πίνακα προσήμου γινομένου , έχουμε :

x	$-\infty$		-2		-1		1		3		$+\infty$
x^2-x-6		+	0	−		−		−	0	+	
x^2-1		+		+	0	−	0	+		+	
Γινόμενο		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Άρα τελικά : $x \in [-2,-1] \cup [1,3]$

6) ΑΡΡΗΤΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Είναι οι ανισώσεις που περιέχουν μια τουλάχιστον ρίζα .

➤ Για τη λύση τους βάζουμε περιορισμούς , υψώνουμε διαδοχικά σε κατάλλη-λες δυνάμεις μέχρι να οδηγηθούμε σε ανίσωση , την οποία λύνουμε και προσδιορίζουμε τις ρίζες της . Τέλος κάνουμε συναλήθευση της λύσης με τους περιορισμούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η εξίσωση : $\sqrt{9-x} > \sqrt{x-5}$

Πρέπει : $\left.\begin{array}{l} 9-x \geq 0 \\ x-5 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x \leq 9 \\ x \geq 5 \end{array}$ Άρα : $5 \leq x \leq 9$ ή $x \in [5,9]$. Οπότε :

$$\sqrt{9-x} > \sqrt{x-5} \Leftrightarrow \left(\sqrt{9-x}\right)^2 > \left(\sqrt{x-5}\right)^2 \Leftrightarrow 9-x > x-5 \Leftrightarrow 2x < 14 \Leftrightarrow x < 7$$

και κάνοντας συναλήθευση με τον περιορισμό έχουμε : $x \in [5,7)$.

7) ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

➤ Για την επίλυση των εκθετικών ανισώσεων εργαζόμαστε όπως στις εκθετι-κές εξισώσεις . Έτσι καταλήγουμε στην επίλυση ανισώσεων της μορφής : $\boldsymbol{\alpha^{f(x)} > \alpha^{g(x)}}$. Τότε αν :

- $\alpha>1$ έχουμε : $\alpha^{f(x)} > \alpha^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
- $0<\alpha<1$ έχουμε : $\alpha^{f(x)} > \alpha^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

1) $2^{x^2-2x} < 8^{x-2} \Leftrightarrow 2^{x^2-2x} < 2^{3(x-2)} \overset{2>1}{\Leftrightarrow} x^2-2x < 3(x-2) \Leftrightarrow x^2-2x < 3x-6 \Leftrightarrow x^2-2x-3x+6 < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2-5x+6 < 0 \Leftrightarrow x \in (2,3)$

2) $3^{2x}+3 \le 28 \cdot 3^{x-1} \Leftrightarrow 3^{2x}-28 \cdot \frac{3^x}{3}+3 \le 0$. Θέτουμε $3^x = y > 0$ και έχουμε : $y^2 - \frac{28}{3}y+3 \le 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 28y+9 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le y \le 9 \Leftrightarrow 3^{-1} \le 3^x \le 3^2 \overset{3>1}{\Leftrightarrow} -1 \le x \le 2$

8) ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

➤ Για την επίλυση των λογαριθμικών ανισώσεων εργαζόμαστε όπως στις λογαριθμικές εξισώσεις . Έτσι καταλήγουμε στην επίλυση ανισώσεων της μορφής : $\mathbf{\log_\alpha f(x) > \log_\alpha g(x)}$. Τότε αν :

- α>1 έχουμε : $\log_\alpha f(x) > \log_\alpha g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
- 0<α<1 έχουμε : $\log_\alpha f(x) > \log_\alpha g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η εξίσωση : $\log_{1/5}\left(3^x+2\right) \le 2x \log_{1/5} 3$

Η ανίσωση γράφεται : $\log_{1/5}\left(3^x+2\right) \le \log_{1/5} 3^{2x} \Leftrightarrow 3^x+2 \le 3^{2x} \left(\text{αφού } 0 < \frac{1}{5} < 1\right)$.

Θέτουμε $3^x = y > 0$, οπότε : $y+2 \ge y^2 \Leftrightarrow y^2-y-2 \le 0 \Leftrightarrow 0 < y \le 2$. Και τελικά :
$0 < y \le 2 \Leftrightarrow 0 < 3^x \le 2 \Leftrightarrow 3^x \le 2 \Leftrightarrow \log_3 3^x \le \log_3 2 \Leftrightarrow x \log_3 3 \le \log_3 2 \Leftrightarrow x \le \log_3 2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να λυθούν οι ανισώσεις :

i) $\frac{x-3}{2} - \frac{x-4}{3} \ge 1 + \frac{x-3}{4}$

ii) $(x+2)^2-(x-2)^2 < 0$

iii) $x - \frac{x-2}{2} > \frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{4}$

iv) $\frac{x+5}{6} + 2 \le \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{3}\right)$

v) $(2x+1)^3+(2x-1)^3 > 16x^3 - 12$

vi) $\frac{2x-1}{3} - \frac{5x+2}{12} > \frac{x-3}{4} + 1$

2) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις :

i) $\begin{cases} \frac{x+5}{3} + \frac{2-x}{7} - \frac{x+1}{6} > 0 \quad \text{και} \\ \frac{2x-5}{4} - \frac{x}{3} < \frac{2-2x}{12} \end{cases}$

ii) $\begin{cases} 27(x-1)+7 \le \frac{11}{2}x - 5(x-2) \quad \text{και} \\ (2x-1)^2+(x+2)^2 \ge 5x(x-3) \end{cases}$

3) Να λυθούν οι ανισώσεις :

i) $|3x-1| \le \frac{1}{2}$ iv) $3|x-1|-2|x+1| \le x$ vii) $|3x+2| \ge 3|x-1|$

ii) $\frac{5|x|-7}{2} - \frac{3|x|+1}{4} < |x|+5$ v) $1 \le |x-3| \le 4$ viii) $\frac{|x+1|-|x-1|}{|x+1|+|x-1|} \ge 0$

iii) $2|x|+3|x-1| > 5x-2$ vi) $\left||x-1|-2\right| \le 3$ ix) $\left|x^2-2x+1\right| \ge \left|x^2-1\right|$

4) Να λυθούν οι ανισώσεις :

i) $2x^2+x-15<0$ iv) $x^2-x+5 \ge 0$ vii) $(x+1)^2 \ge 3(x+1)$

ii) $x^2-25<0$ v) $x^2+4x+4>0$ viii) $5x^2+3x-2 \ge 3x^2-2x+10$

iii) $x^2-7x \ge 0$ vi) $x^2-6x-16 \ge 0$ ix) $(2x-1)^2 \ge 3(2x-1)$

5) Να λυθούν οι ανισώσεις :

i) $x^3+2x-3 \ge 0$ iv) $x^3-3x^2-4x+12 \le 0$ vii) $2x^3+4x^2 \le 3\left(x^2+5x+6\right)$

ii) $x^4-5x^2+4<0$ v) $x^3+12x \ge 8x^2$ viii) $4x^4+12x^3+3x^2-13x-6<0$

iii) $x^3+2x^2-5x-6<0$ vi) $x^3+3x > x^2+27$ ix) $3x^3-5x^2+2x>0$

6) Να λυθούν οι ανισώσεις :

i) $\frac{2x-1}{5-x} < -1$ iv) $\frac{4x^2-5x-1}{2x^2-5x+3} < 1$ vii) $\frac{x+10}{x-5} - \frac{10}{x} > \frac{11}{6}$

ii) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12} \le 1$ v) $\frac{1}{x-1} > \frac{2}{3x+1}$ viii) $\frac{1}{x^2+6x+5} \le \frac{1}{x^2+3}$

iii) $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \le 2$ vi) $\frac{5}{x+2} + \frac{1}{x+3} > \frac{7}{6}$ ix) $\frac{1}{1-x^2} < \frac{2}{3x+1}$

7) Να λυθούν οι ανισώσεις :

i) $\sqrt{3-x} \ge \sqrt{x+1}$ iv) $2\sqrt{x+3}-3\sqrt{x+2}<0$ vii) $\sqrt{x-8}+\sqrt{x-5}<3$

ii) $\sqrt{2x+1} > x-1$ v) $\sqrt{7x-2}-\sqrt{5x-8}>2$ viii) $\sqrt{4x^2+7x-2} > 2x+1$

iii) $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+3}>0$ vi) $\sqrt{x^2-2x+6} \ge 2x-3$ ix) $\sqrt{x+2} < 2+\sqrt{x-6}$

8) Να λυθούν οι ανισώσεις :

i) $2^x \geq \frac{1}{16}$

ii) $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x-1} < \left(\frac{3}{2}\right)^x$

iii) $2^{x+3} + 2^{x+1} > 48 + 2^{x+2}$

iv) $2^{x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 < 0$

v) $\left(\sqrt{2} - 1\right)^{x^4 - 5x^2 + 4} \geq 1$

vi) $27^x + 3^x > 5^x$

vii) $4 \cdot 3^{2x} - 2 \cdot 3^x < 2$

viii) $8^x + 2^x < 20$

ix) $8^{4x-1} > \left(16\sqrt{2}\right)^{2x+1}$

9) Να λυθούν οι ανισώσεις :

i) $\log x^2 \geq \log^2 x$

ii) $\log_2 \sqrt{x} < \sqrt{\log_2 x}$

iii) $\log\left(2^x + 2 \cdot 3^x\right) + \log 81 > x \log 3 + \log 178$

iv) $x^{\log_2 x} > 8$

v) $\log_3 x \cdot \log_9 x < 1$

vi) $\log_{1/2}\left[\log_3 (3x - 1)\right] > 0$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

1) Τριγωνομετρικές ταυτότητες

$ημ^2x + συν^2x = 1$	$σφx = \frac{συνx}{ημx}$, $ημx \neq 0$	$1 + εφ^2x = \frac{1}{συν^2x}$
$εφx = \frac{ημx}{συνx}$, $συνx \neq 0$	$εφx \cdot σφx = 1$	$1 + σφ^2x = \frac{1}{ημ^2x}$

2) Τριγωνομετρικοί αριθμοί 1ου τεταρτημορίου

x	ημx	συνx	εφx	σφx
0^o (0 rad)	0	1	0	δεν ορίζεται
30^o (π/6 rad)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45^o (π/4 rad)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^o (π/3 rad)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90^o (π/2 rad)	1	0	δεν ορίζεται	0

3) Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

$ημ(-x) = -ημx$	$συν(-x) = συνx$	$εφ(-x) = -εφx$	$σφ(-x) = -σφx$
$ημ(π-x) = ημx$	$συν(π-x) = -συνx$	$εφ(π-x) = -εφx$	$σφ(π-x) = -σφx$
$ημ(π+x) = -ημx$	$συν(π+x) = -συνx$	$εφ(π+x) = εφx$	$σφ(π+x) = σφx$
$ημ\left(\frac{π}{2}-x\right) = συνx$	$συν\left(\frac{π}{2}-x\right) = ημx$	$εφ\left(\frac{π}{2}-x\right) = σφx$	$σφ\left(\frac{π}{2}-x\right) = εφx$
$ημ\left(\frac{π}{2}+x\right) = συνx$	$συν\left(\frac{π}{2}+x\right) = -ημx$	$εφ\left(\frac{π}{2}+x\right) = -σφx$	$σφ\left(\frac{π}{2}+x\right) = -εφx$

4) Τριγωνομετρικές εξισώσεις

$$ημx=ημθ \Leftrightarrow x=2κπ+θ \quad ή \quad x=2κπ+(π-θ)\ ,\ κ\in Z$$
$$συνx=συνθ \Leftrightarrow x=2κπ+θ \quad ή \quad x=2κπ-θ\ ,\ κ\in Z$$
$$εφx=εφθ \Leftrightarrow x=κπ+θ\ ,\ κ\in Z$$
$$σφx=σφθ \Leftrightarrow x=κπ+θ\ ,\ κ\in Z$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η εξίσωση : $συν\left(5x+\frac{2π}{3}\right)=ημ3x$

$$συν\left(5x+\frac{2π}{3}\right)=ημ3x \Leftrightarrow συν\left(5x+\frac{2π}{3}\right)=συν\left(\frac{π}{2}-3x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+\frac{2π}{3}=2κπ+\left(\frac{π}{2}-3x\right) & ή \\ 5x+\frac{2π}{3}=2κπ-\left(\frac{π}{2}-3x\right) & ,\ κ\in Z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x=2κπ+\frac{3π}{6}-\frac{4π}{6} & ή \\ 2x=2κπ-\frac{3π}{6}-\frac{4π}{6} & ,\ κ\in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x=2κπ-\frac{π}{6} & ή \\ 2x=2κπ-\frac{7π}{6} & ,\ κ\in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{4}κπ-\frac{π}{48} & ή \\ x=κπ-\frac{7π}{12} & ,\ κ\in Z \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η εξίσωση : $\sqrt{3}\ εφ^2x+2\ εφx-\sqrt{3}=0$

Θέτουμε εφx=y (1), οπότε η εξίσωση γράφεται : $\sqrt{3}\ y^2+2\ y-\sqrt{3}=0$ (2)

Η (2) έχει διακρίνουσα $Δ = 4+4\sqrt{3}\sqrt{3} = 16$ και ρίζες : $y_1=\frac{-2+4}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ και $y_2=\frac{-2-4}{2\sqrt{3}}=\frac{-3}{\sqrt{3}}=\frac{-3\sqrt{3}}{3}=-\sqrt{3}$. Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε :

- $εφx=\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow εφx=εφ\frac{π}{6} \Leftrightarrow x=κπ+\frac{π}{6}\ ,\ κ\in Z$
- $εφx=-\sqrt{3} \Leftrightarrow σφ\left(\frac{π}{2}+x\right)=σφ\frac{π}{6} \Leftrightarrow \frac{π}{2}+x=κπ+\frac{π}{6}\ ,\ κ\in Z \Leftrightarrow x=κπ-\frac{π}{3}\ ,\ κ\in Z$

5) Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών

$ημ(α+β)=ημα\cdot συνβ+συνα\cdot ημβ$ $ημ(α-β)=ημα\cdot συνβ-συνα\cdot ημβ$	$συν(α+β)=συνα\cdot συνβ-ημα\cdot ημβ$ $συν(α-β)=συνα\cdot συνβ+ημα\cdot ημβ$
$εφ(α+β)=\frac{εφα+εφβ}{1-εφα\cdot εφβ}$	$εφ(α-β)=\frac{εφα-εφβ}{1+εφα\cdot εφβ}$

6) Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α

$$ημ2α=2ημα \cdot συνα$$
$$συν2α=συν^2α-ημ^2α = 2συν^2α-1 = 1-2ημ^2α$$
$$εφ2α=\frac{2εφα}{1-εφ^2α}$$

<u>Προσοχή :</u> Οι τύποι αυτοί εκφράζουν και τη σχέση ανάμεσα στο τόξο και στο μισό του .

π.χ. $ημx=2\, ημ\frac{x}{2} \cdot συν\frac{x}{2}$, $συν7x=1-2ημ^2\frac{7x}{2}$

6) Τύποι αποτετραγωνισμού

$$ημ^2α=\frac{1-συν2α}{2} \qquad συν^2α=\frac{1+συν2α}{2}$$

7) Τύποι μετασχηματισμού γινομένου σε άθροισμα

$$2\, ημα \cdot συνβ=ημ(α+β)+ημ(α-β) \qquad 2\, ημα \cdot ημβ=συν(α-β)-συν(α+β)$$
$$2\, συνα \cdot συνβ=συν(α-β)+συν(α+β)$$

8) Τύποι μετασχηματισμού αθροίσματος σε γινόμενο

$ημA+ημB=2ημ\frac{A+B}{2} \cdot συν\frac{A-B}{2}$	$συνA+συνB=2συν\frac{A+B}{2} \cdot συν\frac{A-B}{2}$
$ημA-ημB=2ημ\frac{A-B}{2} \cdot συν\frac{A+B}{2}$	$συνA-συνB= -2ημ\frac{A-B}{2} \cdot ημ\frac{A+B}{2}$

ΒΑΣΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΠΡΟΟΔΩΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ	ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ
$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\,\omega$ $S_\nu = \dfrac{(\alpha_1+\alpha_\nu)\,\nu}{2} = \dfrac{(\alpha_1+(\nu-1)\,\omega)\,\nu}{2}$	$\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$ Αν $\lambda \neq 1 \Rightarrow S_\nu = \alpha_1 \cdot \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$ Αν $\lambda = 1 \Rightarrow S_\nu = \nu \cdot \alpha_1$ Αν $\lvert\lambda\rvert < 1 \Rightarrow S = \dfrac{\alpha_1}{1-\lambda}$

ΒΑΣΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΩΝ

$S_1 = 1+2+3+\ .\ .\ .\ +\nu = \dfrac{\nu\,(\nu+1)}{2}$
$S_2 = 1^2+2^2+3^2+\ .\ .\ .\ +\nu^2 = \dfrac{\nu\,(\nu+1)\,(2\nu+1)}{6}$
$S_3 = 1^3+2^3+3^3+\ .\ .\ .\ +\nu^3 = (S_1)^2 = \left[\dfrac{\nu\,(\nu+1)}{2}\right]^2$