

Θέματα Μαθηματικών 4^{ης} Δέσμης (27/6/94)

- ZΗΤΗΜΑ1** A. Δίνεται ο θετικός πραγματικός αριθμός α και η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 - 2x \ln x$ με $x \in (0, +\infty)$.
- α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.
- β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$ και να προσδιορίσετε το α ώστε η εφαπτομένη αυτή να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- B. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο P η οποία έχει συνεχή f'' στο P , παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0=2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$. Αν ισχύει $\int_0^2 [x \cdot f''(x) + 3 \cdot f'(x)] dx = -\frac{8}{3}$ να υπολογίσετε το $f(2)$.
- ZΗΤΗΜΑ2** A. Έστω A, B πίνακες $n \times n$ τέτοιои ώστε $A + (B - I) = AB - I$, όπου I ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας. Να αποδείξετε ότι ο πίνακας $(A - I)$ αντιστρέφεται.
- B. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας για τον οποίο υποθέτουμε ότι $I - A^2 + A^4 = O$, όπου I ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας και O ο μηδενικός $n \times n$ πίνακας.
- α) Να αποδείξετε ότι $A^6 + I = O$, ότι ο A έχει αντίστροφο και ότι $A^{-1} = -A^5$.
- β) Να αποδείξετε ότι $-A^{308} + (A^{-1})^{105} = A^2 + A^3$.
- ZΗΤΗΜΑ3** A. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .
- B. Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων και A, B είναι υποσύνολα του Ω . Έστω $P(A') \leq 0,28$ και $P(B') \leq 0,71$ Να αποδείξετε ότι α) $P(A \cap B) \geq 1,01 - P(A \cup B)$ β) το ενδεχόμενο $A \cap B$ δεν είναι το \emptyset .
- ZΗΤΗΜΑ4** A. Έστω ότι η ευθεία $\psi = 2x + 5$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$. Να βρείτε τα όρια:
- α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x]$.
- β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ , αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu \cdot f(x) + 4x}{x \cdot f(x) - 2x^2 + 3x} = 1$
- B. Να αποδείξετε ότι α) $e^x - x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- β) Η εξίσωση $2 \cdot e^x + 2x = x^2 + 2$ έχει ακριβώς μια λύση την $x=0$.