

Θέματα Μαθηματικών 1^{ης} Δέσμης (30/6/97)

ΖΗΤΗΜΑ 1

A. Να αποδειχθεί ότι αν ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο αντίστροφός του είναι μοναδικός.

B. Έστω ότι A, B είναι $n \times n$ πίνακες και έστω ότι οι πίνακες A, B και

$2AB - 3I$ είναι αντιστρέψιμοι. Να αποδειχθεί ότι οι πίνακες $\Gamma = 2A - 3B^{-1}$ και

$\Delta = (2A - 3B^{-1})^{-1} - \frac{1}{2}A^{-1}$ είναι αντιστρέψιμοι.

ΖΗΤΗΜΑ 2

A. Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} , που έχουν πρώτη και δεύτερη παράγωγο και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω a πραγματικός αριθμός. Θέτουμε $A = \frac{f(a)}{g(a)}$ και

$B = \frac{f'(a) - Ag'(a)}{g(a)}$. Αν φ είναι πραγματική συνάρτηση

ορισμένη στο $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, τέτοια ώστε

$$\frac{f(x)}{(x-a)^2 g(x)} = \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{x-a} + \frac{\varphi(x)}{g(x)} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, \text{ να}$$

αποδειχθεί ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$.

B. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση f ορισμένη στο \mathbb{R} , δύο φορές παραγωγίσιμη τέτοια ώστε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε

$$(x-2)f''(x) + (\alpha x - \beta x^2)f'(x) = e^{x-2} - 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Έστω ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $\rho \neq 2$ ώστε $f'(\rho) = 0$. Να εξετάσετε αν το $f(\rho)$ είναι τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης f .

ΖΗΤΗΜΑ 3

A. Δίνεται πραγματική συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} τέτοια ώστε

$$g(x) > 0 \quad \text{και} \quad g''(x)g(x) - [g'(x)]^2 > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι

i) η συνάρτηση $\frac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα και

$$\text{ii) } g\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right) \leq \sqrt{g(x_1)g(x_2)} \quad \text{για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

B. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , τέτοια ώστε υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε να ισχύει

$$g(x+\psi) = e^{\psi} g(x) + e^x g(\psi) + x\psi + \alpha \quad \text{για κάθε } x, \psi \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι

$$\text{i) } g(0) = -\alpha$$

$$\text{ii) } g'(x) = g(x) + g'(0)e^x + x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω C είναι η γραμμή του επιπέδου με εξίσωση

$$\psi = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \quad \text{όπου } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ είναι πραγματικοί αριθμοί}$$

και $\alpha \neq 0$.

Έστω $A(\chi_1, \psi_1), B(\chi_2, \psi_2), \Gamma(\chi_3, \psi_3), \Delta(\chi_4, \psi_4)$ είναι σημεία της C . Υποθέτουμε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB συμπίπτει με το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma\Delta$ και επίσης υποθέτουμε ότι το μέσο αυτό δεν ανήκει στη ευθεία που έχει εξίσωση $\beta + 3\alpha\chi = 0$.

A. Να αποδειχθεί ότι $\chi_1\chi_2 = \chi_3\chi_4$

B. Να αποδειχθεί ότι το σημείο A συμπίπτει με το σημείο Γ ή με το σημείο Δ .