

Θέματα Μαθηματικών 1^{ης} Δέσμης 1985

ΖΗΤΗΜΑ1

α) Έστω μια ευθεία που σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων έχει εξίσωση: $Ax + B\psi + \Gamma = 0$ με $|A| + |B| \neq 0$. Έστω $P(x_1, \psi_1)$ είναι ένα σημείο εκτός της ευθείας αυτής. Να αποδειχθεί ότι η απόσταση του σημείου P από την ευθεία ισούται με : $\frac{|Ax_1 + B\psi_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

β) Θεωρούμε δυο ευθείες που σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων έχουν εξίσωση $x + \mu\psi + 1 = 0$ και $2\mu x + 2\psi + \lambda = 0$ αντίστοιχα (όπου μ, λ είναι πραγματικοί αριθμοί). Να προσδιορίσετε για ποια ζεύγη τιμών των λ, μ οι δύο ευθείες είναι παράλληλες και έχουν απόσταση μεταξύ τους $2\sqrt{2}$.

ΖΗΤΗΜΑ2

Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} x + 2y + 3\omega = 0 \\ 4x + (3 + \lambda)y + 6\omega = 0 \\ 5x + 4y + (1 + \lambda)\omega = 0 \end{cases}$$

α) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεις.

β) Να βρεθούν όλες οι λύσεις του συστήματος για την περίπτωση που το λ ισούται με την μικρότερη από τις τιμές που βρήκατε στο ερώτημα α) του ζητήματος αυτού.

ΖΗΤΗΜΑ3

α) Έστω μια ακολουθία (β_n) . Αν υπάρχουν δυο ακολουθίες (α_n) και (γ_n) με κοινό όριο, τέτοιες ώστε για κάθε $n > k$ (k ένας συγκεκριμένος φυσικός) να είναι $\alpha_n \leq \beta_n \leq \gamma_n$ τότε και η (β_n) έχει το ίδιο όριο.

β) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $\alpha_n = \sqrt[n]{n^2 - 2n + 3}$.

ΖΗΤΗΜΑ4

α) Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα Δ και ότι στο σημείο $x_0 \in \Delta$ είναι $f'(x_0) = 0$.

Αν $f''(x_0) > 0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

β) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2(x - 3) + 4$, $x \in \mathbb{R}$. Έστω x_1, x_2 είναι τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και x_3 το σημείο στο οποίο παρουσιάζει καμπή. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία του επιπέδου $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά.