

Θέματα Μαθηματικών 1^{ης} Δέσμης 1988

- ZΗΤΗΜΑ1** A. Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} (\lambda + 1)x + y = \lambda + 1 \\ x + (\lambda + 1)y = 1 \\ x + y = 2\lambda + 1 \end{cases}$$
- B. Να δείξετε ότι το σύνολο $A = \left\{ \frac{4\kappa + 1}{5 - 4\lambda} : \kappa, \lambda \in \mathbb{Z} \right\}$ εφοδιασμένο με την συνήθη πράξη του πολλαπλασιασμού κλασμάτων στο \mathbb{R} είναι πολλαπλασιαστική ομάδα.
- ZΗΤΗΜΑ2** A. Να αποδείξετε ότι κάθε ακολουθία αύξουσα και φραγμένη άνω είναι συγκλίνουσα
- B. Να βρείτε το όριο της ακολουθίας (α_n) με $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{n+1} = \sqrt{4\alpha_n + 5} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- ZΗΤΗΜΑ3** A. Θεωρούμε συνάρτηση g ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Να αποδείξετε ότι αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \Delta$ και $g(x_0) \neq 0$ τότε και η συνάρτηση $\frac{1}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και
- $$\text{είναι} \left(\frac{1}{g} \right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$
- B. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}$
- i) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης.
- ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C της συνάρτησης f τον άξονα Ox και τις ευθείες με εξισώσεις $x=2, x=5$.
- ZΗΤΗΜΑ4** A. i) Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής.
- ii) Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$ και η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + \kappa$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή έχουν ένα διπλό κοινό σημείο αν και μόνο αν $p = 2\lambda\kappa$.
- B. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$.
- i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $3x + y + 3 = 0$.
- ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της παραβολής τις οποίες φέρνουμε από το σημείο $(-2, 1)$.