

Θέματα Μαθηματικών 1^{ης} Δέσμης 1990

ΖΗΤΗΜΑ1

A. Αν A και B είναι πίνακες $n \times n$ και ισχύουν οι σχέσεις $A^2 = A$ και $AB + BA = O$ όπου O ο μηδενικός πίνακας $n \times n$ τότε να αποδείξετε ότι είναι $AB = BA = O$.

B. Έστω A, B, Γ πίνακες $n \times n$ και I ο μοναδιαίος πίνακας $n \times n$. Αν ισχύει ότι $AB = \Gamma A = I$ τότε να αποδείξετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και ότι $A^{-1} = B = \Gamma$.

Γ. Έστω A, B πίνακες $n \times n$ όπου ο B είναι αντιστρέψιμος. Να αποδείξετε ότι για κάθε κ θετικό ακέραιο ισχύει η σχέση :

$$(BAB^{-1})^k = BA^k B^{-1}.$$

ΖΗΤΗΜΑ2

A. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (a, b) τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε να είναι $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

B. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{\alpha x^3}{3} + \left(\frac{\beta}{2} + \delta \right) x^2 + (\gamma - \delta) x + \delta \text{ όπου } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ είναι}$$

πραγματικοί αριθμοί και ισχύει $\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

ΖΗΤΗΜΑ3

A. Θεωρούμε κύκλο με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ καθώς και σημείο $A(x_1, y_1)$ αυτού του κύκλου. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη αυτού του κύκλου στο σημείο A έχει εξίσωση:

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = \rho^2.$$

B. Δίνονται η ευθεία (ε) με εξίσωση $5x + 3y + 2 = 0$ και ο κύκλος C με εξίσωση $x^2 + y^2 - x - 2 = 0$ που τέμνονται στα σημεία M και N.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό λ η εξίσωση $x^2 + y^2 - x - 2 + \lambda(5x + 3y + 2) = 0$ παριστάνει κύκλο ο οποίος περνάει από τα σημεία M και N. Για ποια τιμή του λ ο κύκλος αυτός περνάει από την αρχή των αξόνων.

β) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων της ερώτησης (α) ανήκουν σε ευθεία ϵ_1 της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ΖΗΤΗΜΑ4

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3x + \frac{1}{2x^2}$

A. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

B. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(a)$ του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f της ευθείας με εξίσωση $y = 3x$ και των ευθειών με εξισώσεις $x = 1$ και $x = a$ με $a > 1$.

Γ. Να υπολογίσετε το όριο του εμβαδού $E(a)$ του ανωτέρου χωρίου όταν το a τείνει στο άπειρο.