

## Θέματα Μαθηματικών 4<sup>ης</sup> Δέσμης 1984

**ΖΗΤΗΜΑ1** Θεωρούμε τους πίνακες  $\begin{bmatrix} \frac{\sin x}{\sqrt{2}} & \frac{\eta \mu x}{\sqrt{2}} \\ \frac{\eta \mu x}{\sqrt{2}} & \frac{\sin x}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} \frac{\sin x}{\sqrt{2}} & -\frac{\eta \mu x}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\eta \mu x}{\sqrt{2}} & \frac{\sin x}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$  και

ονομάζουμε  $H(x)$  τον πρώτο και  $\Sigma(x)$  το δεύτερο.

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει  $H^2(x) + \Sigma^2(x) = I$  όπου  $I$  ο πίνακας

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

β) Να λύσετε την εξίσωση  $\Sigma^2(x) - H^2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  ( $x \in \mathbb{R}$ )

**ΖΗΤΗΜΑ2** α) Έστω το σύστημα  $(\Sigma) : \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 \psi = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 \psi = \gamma_2 \end{cases}$  με τους

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  πραγματικούς αριθμούς. Να αποδείξετε ότι αν ο

πίνακας  $\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix}$  είναι αντιστρέψιμος τότε το σύστημα έχει μία

μόνο λύση.

β) Να λύσετε (και να διερευνήσετε) το σύστημα :

$$\begin{cases} (\lambda + 1)x - 2(\lambda - 1)\psi = 3 \\ x + 3\lambda\psi = 4\lambda + 5 \end{cases} \quad \text{όπου } \lambda \text{ πραγματικός αριθμός.}$$

**ΖΗΤΗΜΑ3** Έστω η πραγματική συνάρτηση  $\psi$  της πραγματικής μεταβλητής  $x$  με :

$$\psi(x) = x + \frac{4}{x}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο των τιμών της  $\psi$

β) Να εξετάσετε την  $\psi$  ως προς την μονοτονία σε καθένα από τα διαστήματα  $(0, 2]$  και  $[2, +\infty)$

**ΖΗΤΗΜΑ4** α) Έστω μια πραγματική συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού της  $A$  ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ , που περιέχει ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$  με

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και έστω  $x_0$  ένα από τα άκρα του διαστήματος  $(\alpha, \beta)$ . Τι

εννοούμε όταν λέμε ότι : η συνάρτηση  $f$  έχει όριο στο  $x_0$  το  $+\infty$

και τι όταν λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  έχει όριο στο  $x_0$  το  $-\infty$  ;

β) Έστω η πραγματική συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής  $x$

με  $\psi(x) = \frac{2x-10}{5-\sqrt{5x}}$  να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 5} \psi(x)$ .