

## Θέματα Μαθηματικών 4<sup>ης</sup> Δέσμης (9/7/99)

### ΖΗΤΗΜΑ 1

A. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

B α) Να αποδείξετε ότι  $\ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5}$  για κάθε

$$x \in [0, +\infty)$$

β) Έστω συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $[0, +\infty)$  για την οποία ισχύει

$$[f(x)]^5 + 2[f(x)]^3 + 3f(x) = (x+1)\ln(x+1) - \frac{4}{5}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 182$$

για κάθε  $x \in [0, +\infty)$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$

### ΖΗΤΗΜΑ 2

A. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου  $A(1,3), B(-1,0), \Gamma(3,-1)$

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην ευθεία BΓ

β) Έστω C ο κύκλος με κέντρο το σημείο A και ακτίνα (AB).

Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της ευθείας BΓ με τον παραπάνω κύκλο

B. Έστω  $\Omega = \{0, 1, 2\}$  ένας δειγματικός χώρος με

$$P(0) = 2P(2) = \frac{1}{3}$$

α) Να βρείτε το  $P(1)$

β) Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = e^x - \frac{\lambda}{2}x^2 + 118, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } \lambda \in \Omega$$

Θεωρούμε το ενδεχόμενο  $E = \{\lambda \in \Omega / \text{η γραφική παράσταση της } f \text{ έχει σημείο καμπής το } (0, f(0))\}$ . Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου E.

### ΖΗΤΗΜΑ 3

A. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \eta \mu^2(\alpha x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$  ώστε να ισχύει

$$f''(x) + 4\alpha^2 f(x) = 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

B. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση  $f$  και να αποδείξετε ότι  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in [1, 3]$

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x=1$  και  $x=3$ .

### ΖΗΤΗΜΑ 4

A. Έστω A ένας  $n \times n$  πίνακας για τον οποίο ισχύει

$$(A - I)^{-1} = A + 2I \text{ όπου } I \text{ ο } n \times n \text{ μοναδιαίος πίνακας}$$

α) Να αποδείξετε ότι  $A^2 = 3I - A$

β) Έστω X  $n \times n$  πίνακας για τον οποίο ισχύει

$$AX - A = 4I - X. \text{ Να αποδείξετε ότι } X = A + I$$

B. Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού

το  $\mathbb{R}$  και το σύστημα 
$$\begin{cases} f(1)x + y + \omega &= 0 \\ f(2)x + 2y + 2\omega &= 0 \\ 2x + f(2)y + 2f(1)\omega &= 0 \end{cases} \text{ με}$$

αγνώστους  $x, y, \omega$ .

Υποθέτουμε ότι το σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεις

Να αποδείξετε ότι α)  $\frac{f(2)}{2} = \frac{f(1)}{1}$  β) Η εξίσωση

$xf'(x) - f(x) = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(1, 2)$ .