

## Θέματα Μαθηματικών 4<sup>ης</sup> Δέσμης (27/6/98)

**ΖΗΤΗΜΑ 1ο** Α. Να αποδείξετε ότι αν υπάρχει μια αρχική συνάρτηση  $F$  της  $f$  σ' ένα διάστημα  $\Delta$  τότε υπάρχουν άπειρες και μάλιστα είναι όλες οι συναρτήσεις της μορφής  $G(x) = F(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  και μόνο αυτές.

Με  $\mathbb{R}$  συμβολίζουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου  $C: x^2 + y^2 + 1 = 2x + 6y$  και είναι κάθετη στην ευθεία  $\varepsilon: 2x + y + 5 = 0$ .

**ΖΗΤΗΜΑ 2ο** Δίνεται η συνάρτηση  $\varphi(t) = 2t + \mu$ ,  $t \in \mathbb{R}$  όπου η παράμετρος  $\mu$  είναι ένας πραγματικός αριθμός.

Μια επιχείρηση έχει έσοδα  $E(t)$  που δίνονται σε εκατομμύρια δραχμές από τον τύπο

$$E(t) = (t-1)\varphi(t), \quad t \geq 0 \quad \text{όπου } t \text{ συμβολίζει το χρόνο σε έτη.}$$

Το κόστος λειτουργίας  $K(t)$  της επιχείρησης δίνεται επίσης σε εκατομμύρια δραχμές σύμφωνα με τον τύπο

$$K(t) = \varphi(t+4), \quad t \geq 0.$$

α) Να βρείτε τη συνάρτηση κέρδους  $P(t)$  για  $t \geq 0$  όταν γνωρίζουμε ότι κατά το πρώτο έτος λειτουργίας η επιχείρηση παρουσίασε ζημιά δώδεκα εκατομμύρια δραχμές.

β) Ποια χρονική στιγμή θα αρχίσει η επιχείρηση να παρουσιάζει κέρδη;

γ) Ποιος θα είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης κέρδους στο τέλος του δεύτερου έτους;

δ) Να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος

$$I = \frac{111}{2} \int_0^6 P(t) dt.$$

**ΖΗΤΗΜΑ 3ο** Δίνεται η συνάρτηση  $h(x) = 2^{12}(e^{-4x} - e^{-ax})$ ,  $x \geq 0$

όπου  $a$  πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος του 4

α) Να δείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = h(0) = 0$

β) Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα τη συνάρτηση  $h(x)$

γ) Αν  $x_1$  είναι ρίζα της πρώτης παραγώγου και  $x_2$  είναι ρίζα της δευτέρας παραγώγου της  $h(x)$  να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα  $x_1, x_2$

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$M = \frac{334}{75} \int_0^{\ln 2} h(x) dx \quad \text{όταν } a=8$$

**ΖΗΤΗΜΑ 4ο** Δίνεται ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & \lambda+1 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda+2 \end{bmatrix}$  και οι

πολυωνυμικές συναρτήσεις

$$f(x) = 4(x-1)(x^2 - 5x + 6), \quad x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(x) = x^2 + (\kappa^2 - 5\kappa)x + 13, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου  $\kappa$  και  $\lambda$  πραγματικοί αριθμοί.

α) Ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} \quad \text{με}$$

$$\omega_1 = \chi_1, \omega_2 = \chi_2, \omega_3 = \chi_3$$

$$\omega_4 = 4\chi_1, \omega_5 = 4\chi_2, \omega_6 = 4\chi_3$$

όπου  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $f(\chi)=0$

Οι πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων ικανοποιούν τις σχέσεις

$$P(\omega_6) = P(\omega_5) = P(\omega_4) =$$

$$= 3P(\omega_3) = 3P(\omega_2) = 3P(\omega_1)$$

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων του  $\Omega$ .

β) Θεωρούμε το ενδεχόμενο

$$B = \left\{ \lambda \in \Omega \left( \begin{array}{l} \text{το σύστημα } AX = 2X \text{ έχει} \\ \text{και μη μηδενικές λύσεις} \end{array} \right) \right\}$$

όπου  $X$  ένας  $3 \times 1$  άγνωστος πίνακας και  $\Omega$  ο δειγματικός χώρος του α) ερωτήματος. Να υπολογίσετε την πιθανότητα  $P(B)$ .

γ) Να δείξετε ότι για το ενδεχόμενο  $\Gamma$  του  $\Omega$  όπου

$$\Gamma = \left\{ \kappa \in \Omega \left( \begin{array}{l} \eta g(\chi) \text{ παρουσιάζει ακρότατο} \\ \text{στο σημείο } \chi_0 = 3 \end{array} \right) \right\}$$

και  $\Omega$  ο δειγματικός χώρος του α) ερωτήματος ισχύει :  $P(\Gamma) = P(B)$ .

δ) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων  $B \cap \Gamma$  και  $B \cup \Gamma$ .