

Θέματα Μαθηματικών 4^{ης} Δέσμης (3/7/97)

ΖΗΤΗΜΑ 1ο Α. Έστω X, B είναι $n \times m$ πίνακες και A είναι ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας. Να αποδείξετε ότι ισχύει η ισοδυναμία

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

Β. Αν $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}, 2\}$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί χ και ψ ,

$$\text{ώστε να ισχύει η σχέση: } \begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -\lambda \\ \lambda & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi \\ \psi \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

ΖΗΤΗΜΑ 2ο Α. Στην τελευταία Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα, που έγινε στη Βομβάη, πέντε Έλληνες μαθητές βραβεύτηκαν με μετάλλια. Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία αποφάσισε να δωρίσει σε καθένα από τους πέντε μαθητές από δυο βιβλία, που επιλέγονται από μια συλλογή δέκα διαφορετικών βιβλίων. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους τα δέκα αυτά βιβλία μπορούν να διανεμηθούν στους πέντε βραβευθέντες μαθητές;
Β. Θεωρούμε το σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών χ τέτοιων ώστε $1000 \leq \chi \leq 9999$. Ως γνωστόν αυτοί είναι τετραψήφιοι αριθμοί στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Πόσοι από αυτούς τους αριθμούς γράφονται με τέσσερα διαφορετικά ψηφία;

ΖΗΤΗΜΑ 3ο Α. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} και ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$f''(\chi) - g''(\chi) = 4 \text{ για κάθε } \chi \in \mathbb{R}$$

$$f'(1) = g'(1) \text{ και } f(2) = g(2)$$

i) Να βρείτε τη συνάρτηση $t(\chi) = f(\chi) - g(\chi)$, $\chi \in \mathbb{R}$

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .

Β. Έστω f πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο \mathbb{R} που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha < \beta$. Να αποδειχθεί ότι:

$$i) f(\chi) - f(\alpha) \leq f'(\beta)(\chi - \alpha) \text{ για κάθε } \chi \in [\alpha, \beta]$$

$$ii) 2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq f'(\beta)(\beta - \alpha)^2 + 2f(\alpha)(\beta - \alpha).$$

ΖΗΤΗΜΑ 4ο Έστω f πραγματική συνάρτηση συνεχής στο \mathbb{R} τέτοια ώστε

$$f(\chi) \geq 2 \text{ για κάθε } \chi \in \mathbb{R}. \text{ Θεωρούμε τη συνάρτηση:}$$

$$g(\chi) = \chi^2 - 5\chi + 1 - \int_0^{\chi^2 - 5\chi} f(t) dt, \chi \in \mathbb{R}$$

Α. Να αποδείξετε ότι $g(-3) \cdot g(0) < 0$

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(\chi) = 0$ έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα $(-3, 0)$.