

Θέματα Μαθηματικών 1^{ης} Δέσμης (21/6/95)

ΖΗΤΗΜΑ1

A. Έστω n ένας θετικός ακέραιος και I, O είναι αντιστοίχως ο μοναδιαίος και ο μηδενικός πίνακας $n \times n$. Έστω A, B είναι πίνακες $n \times n$ τέτοιοι ώστε $A = B^2 + I$ και $B^4 = O$.

α) Να αποδείξετε ότι i) $A^k = I + kB^2$, για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ και

ii) ο πίνακας $I + A^6 - A^8$ είναι αντιστρέψιμος.

β) Αν ο n είναι περιττός να αποδείξετε ότι $|2A - 3I| \leq 0$.

B. α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 \text{ αν και μόνο αν } \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0.$$

β) Έστω μια συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, \beta]$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha^2 + i f(\alpha)$, $w = f(\beta) + i \beta^2$ με $\alpha \beta \neq 0$.

Αν $|w|^2 + |z|^2 = |w - z|^2$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[a, \beta]$.

ΖΗΤΗΜΑ2

A. Δίνονται οι ελλείψεις

$$c_1: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \text{ και } c_2: \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = 1 \text{ με } 0 < \alpha < \beta.$$

Η ημιευθεία $\psi = (\epsilon \phi \theta) \chi$, $\chi > 0$, $0 < \theta < \pi/2$ τέμνει την C_1 στο σημείο $\Gamma_1(\chi_1, \psi_1)$ και την C_2 στο σημείο $\Gamma_2(\chi_2, \psi_2)$.

α) Αν λ_1 είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_1 στο σημείο Γ_1 και λ_2 είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_2 στο σημείο Γ_2 να αποδείξετε ότι το γινόμενο $\lambda_1 \lambda_2$ είναι ίσον με $(\epsilon \phi \theta)^{-2}$.

β) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση

$$f: (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(\theta) = \lambda_1 \lambda_2.$$

B. Δίνεται θετικός ακέραιος αριθμός n τέτοιος ώστε

$$(1+i)^n = 16. \text{ Έστω } \Omega = \{1, 2, \dots, n\} \text{ είναι ένας δειγματικός}$$

χώρος που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

Εκλέγουμε τυχαίως ένα απλό ενδεχόμενο $\lambda \in \Omega$. Αν

$f(x) = 2x^2 - 4x + \lambda$ με $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση $f(x) = 0$ να μην έχει πραγματικές ρίζες.

ΖΗΤΗΜΑ3

A. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ με $\kappa < \lambda$ και η

συνάρτηση $f(x) = (x - \kappa)^5 (x - \lambda)^3$ με $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{5}{x - \kappa} + \frac{3}{x - \lambda} \text{ για κάθε } x \neq \kappa \text{ και } x \neq \lambda.$$

β) Η συνάρτηση $g(x) = \ln|f(x)|$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα (κ, λ) .

B. α) Να αποδείξετε ότι για κάθε συνάρτηση f συνεχή στο διάστημα $[a, \beta]$ ισχύει : Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, \beta]$.

β) Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(\chi) = \int_a^\beta f(\chi - t) dt, \chi \in \mathbb{R} \text{ με } a, \beta \text{ πραγματικούς αριθμούς είναι}$$

παραγωγίσιμη και ότι αν υπάρχει $\chi_0 \in \mathbb{R}$ με $F'(\chi_0) = 0$ τότε $F(\chi) = 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

ZΗΤΗΜΑ4

A. Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς a, β με $0 < a < \beta$ τη συνεχή συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία $\int_a^\beta f(t) dt = 0$

και τη συνάρτηση $g(\chi) = 2 + \frac{1}{\chi} \cdot \int_a^\chi f(t) dt, \chi \in (0, +\infty)$. Να

αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύουν :

- α) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $(\chi_0, g(\chi_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $\chi' \chi$.
- β) $g(\chi_0) = 2 + f(\chi_0)$

B. Να βρείτε τη συνάρτηση $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή

δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύουν $f(0) = 1995, f'(0) = 1$

$$\text{και } 1 + \int_0^\chi f''(t) \sin t dt = \sin^2 \chi + \int_0^\chi f'(t) \eta \mu t dt.$$