

Θέματα Μαθηματικών 4^{ης} Δέσμης 1989

ΖΗΤΗΜΑ1

A. Αν για τον τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα A υπάρχει αντίστροφος να αποδειχθεί ότι είναι μοναδικός.

B. Έστω ο πίνακας
$$\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
 τον οποίο συμβολίζουμε με $A(x)$

$x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι

1. $A(x_1) \cdot A(x_2) = A(x_1 + x_2)$, ($x_1, x_2 \in \mathbb{R}$)

2. $A(x) \cdot A(-x) = I_3$, (I_3 ο μοναδιαίος 3×3).

ΖΗΤΗΜΑ2

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + \frac{2\alpha}{x} + \beta$, ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) η οποία μηδενίζεται στο $x_1 = 1$ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 2$.

α) Να βρεθούν τα α, β

β) Να βρεθεί το είδος του ακροτάτου και η τιμή του.

ΖΗΤΗΜΑ3

A. Να αποδείξετε ότι : Αν οι συναρτήσεις f, g με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα Δ είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \Delta$ τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \Delta$ και

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

B. Δίνεται η συνάρτηση f με
$$f(x) = \begin{cases} \frac{3\alpha}{x^3} + 1, & 0 < x \leq 2 \\ \frac{1 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 4}, & x > 2 \end{cases}$$

Να προσδιοριστεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

ΖΗΤΗΜΑ4

Να αποδειχθεί ότι :

α) η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα

β) για $\kappa \geq 1$: $\sqrt{\kappa} \leq \int_{\kappa}^{\kappa+1} \sqrt{x} dx$ και $\int_{\kappa-1}^{\kappa} \sqrt{x} dx \leq \sqrt{\kappa}$