

Θέματα Μαθηματικών 4^{ης} Δέσμης (24/6/91)

ΖΗΤΗΜΑ1

A. Αν A και B είναι πίνακες 2×2 να αποδειχθεί ότι $D(AB) = D(A) \cdot D(B)$

B. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να ευρεθούν οι τιμές των x και y οι οποίες επαληθεύουν τη σχέση

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda x \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} y \\ \lambda y \end{bmatrix} = (\lambda + 1) \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

ΖΗΤΗΜΑ2

A. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίζεται στο $x_0 \in \Delta$. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0f'(x_0).$$

B. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = \sqrt{x+3} + x - 3$, $x \geq -3$ στο σημείο $x_0 = -3$.

ΖΗΤΗΜΑ3

A. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g οι οποίες έχουν τις εξής ιδιότητες:

α) Είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο (a, β)
β) για κάθε $x \in [a, \beta]$ και $g(x) \neq 0$ και για κάθε $x \in (a, \beta)$ είναι $g'(x) \neq 0$ και

$$\gamma) f(\beta)g(\alpha) - f(\alpha)g(\beta) = 0$$

Να αποδείξετε ότι

1. Για την συνάρτηση F με $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο $[a, \beta]$.

2. Υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

B. α) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης F με $F(x) = [f(x)]^x$, $x \in \mathbb{R}$

β) Έστω $\alpha > 0$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g με $g(x) = \alpha^{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

ΖΗΤΗΜΑ4

A. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της

$$f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \eta\mu^2 x - \sqrt{2}\eta\mu x + 2\sqrt{2}.$$

β) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} e^x - e, & x < 1 \\ \frac{\ln x}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=0$ και $x=e$.