

Θέματα Μαθηματικών 1^{ης} Δέσμης 1992

ΖΗΤΗΜΑ1

A. Δίνονται ο 2×1 πίνακας $u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ και ο 2×2 πίνακας $A = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\eta \mu \theta \\ \eta \mu \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$ με $\theta \in (0, \pi)$. Ναδειχθεί ότι οι πίνακες u και

Au είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του διανυσματικού χώρου $\Pi_{2 \times 1}$ των πινάκων 2×1 .

B. α) Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 - \sqrt{2}(1-i)z - 2i = 0$

β) Ναδειχθεί ότι η ευθεία που ορίζουν οι εικόνες των ριζών της παραπάνω εξίσωσης στο μιγαδικό επίπεδο διέρχεται από την εικόνα μίας ρίζας της εξίσωσης $z^4 + 1 = 0$.

ΖΗΤΗΜΑ2

A. Ναδειχθεί ότι το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \Gamma(x_3, y_3)$ δίνεται από τον τύπο:

$$E = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

B. α) Δίνονται οι ευθείες $y = \lambda x$ και $y = -\lambda x$ με $\lambda > 0$ και $x > 0$ και ευθεία (ε) η οποία τις τέμνει στα σημεία A και B . Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων A και B συναρτήσει των συντεταγμένων του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB .

β) Ναδειχθεί ότι το σημείο M γράφει τον ένα κλάδο υπερβολής όταν η ευθεία (ε) κινείται έτσι ώστε τα τρίγωνο OAB να έχει σταθερό εμβαδόν κ^2 .

ΖΗΤΗΜΑ3

A. α) Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με τιμές στο $(0, +\infty)$. Ναδειχθεί ότι η συνάρτηση g με $g(x) = \ln f(x)$, $x \in \Delta$ στρέφει τα κοίλα άνω αν και μόνο αν ισχύει η σχέση $f(x) \cdot f''(x) \geq [f'(x)]^2$, $\forall x \in \Delta$.

β) Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα στο οποίο η συνάρτηση g με $g(x) = \ln(x^2 + 2)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

B. α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα κοίλα η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha^x - x$, $x \in \mathbb{R}$ και $0 < \alpha < 1$.

β) Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ για τις οποίες ισχύει η ισότητα $\alpha^{\lambda^2-4} - \alpha^{\lambda-2} = (\lambda^2 - 4) - (\lambda - 2)$ όπου $0 < \alpha < 1$.

ΖΗΤΗΜΑ4

A. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x+4)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τα σημεία (x, y) με $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq f(x)$.

B. α) Να αποδειχθεί ότι μια συνάρτηση f ορισμένη στο \mathbb{R} έχει την ιδιότητα $f' = f$ αν και μόνο αν $f(x) = ce^x$ όπου c πραγματική σταθερά.

β) Να βρεθεί η συνάρτηση g ορισμένη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ η

οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $g'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x + g(x) \cdot \eta\mu x = g(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x$
και $g(0) = 1992$.