

Θέματα Μαθηματικών 4^{ης} Δέσμης 1988

ΖΗΤΗΜΑ1 A. Θεωρούμε το σύστημα:
$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y = \gamma_3 \end{cases}$$
 Να αποδειχθεί ότι αν

$$\text{το σύστημα είναι συμβιβαστό τότε θα ισχύει: } \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

B. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ -3x + 2y + 6z = 0 \end{cases}$$

ΖΗΤΗΜΑ2 A. Έστω S_X η τυπική απόκλιση της μεταβλητής X ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα. Να αποδειχθεί ότι η τυπική απόκλιση S_Ψ της μεταβλητής $\Psi = \alpha X + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι $S_\Psi = |\alpha| S_X$.

B. Έστω $A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ και I, O ο μοναδιαίος και μηδενικός πίνακας 2×2 αντιστοίχως. Να προσδιορίσετε την τιμή του $x \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι $A^2 + 6A - 3I = O$.

ΖΗΤΗΜΑ3 A. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με :

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5x + 6, & x \leq 1 \\ 2\sqrt{x^2 + 3}, & x > 1 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$

B. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \frac{x^3 - 5x^2 + 1}{x} dx$

ΖΗΤΗΜΑ4 A. Έστω $v \in \mathbb{N}$ και $v > 1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = x^v$. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = vx^{v-1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = 3x^3 - \alpha x^2 + \beta x - 3$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Εάν η f έχει τοπικά ακρότατα στα $x_1 = 1$ και $x_2 = -\frac{5}{9}$ τότε να βρεθούν οι αριθμοί α, β .