

Θέματα Μαθηματικών 4^{ης} Δέσμης (1992)

- ZΗΤΗΜΑ1** A. Δίνεται το σύστημα $(\Sigma) : \begin{cases} \alpha_1 x = \beta_1 \\ \alpha_2 x = \beta_2 \end{cases}$ με $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ πραγματικούς αριθμούς.
- α) Να αποδειχθεί ότι το σύστημα (Σ) είναι συμβιβαστό τότε $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 0$ (σ)
- β) Να αποδειχθεί ότι η σχέση (σ) δεν είναι ικανή για να είναι το σύστημα (Σ) συμβιβαστό.
- B. Με την προϋπόθεση ότι ο πίνακας 2×2 $A = \begin{bmatrix} \lambda^3 & -\lambda^2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ έχει ορίζουσα διάφορη του μηδενός να λυθεί για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ το σύστημα $\begin{cases} 2x - \lambda y = \lambda - 1 \\ (\lambda + 1)x - y = 0 \end{cases}$.
- ZΗΤΗΜΑ2** A. Να αποδειχθεί ότι $\forall x \in (0, 1)$ ισχύει η σχέση $1 + x < e^x < 1 + e \cdot x$
- B. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^3 \ln \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
- i) Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}
- ii) Να βρεθεί η παράγωγος της f για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ZΗΤΗΜΑ3** A. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) - 2x(\ln x - 1), x > 0$
- α) Να βρεθεί η παράγωγος f' της f για κάθε $x > 0$
- β) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- B. α) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $E(t) = \int_1^t (x - 2) \cdot \ln x dx$ για κάθε $t > 1$
- β) Να βρεθεί το όριο $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{E'(t)}{t \ln t}$.
- ZΗΤΗΜΑ4** A. Να βρεθεί πολωνυμική συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^3 + \beta x + \gamma$, $x \in \mathbb{R}$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες
- i) Η συνάρτηση f είναι περιττή
- ii) Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = 1$
- iii) $\int_0^2 f(x) dx = 2$
- B. Η συνάρτηση g έχει συνεχή παράγωγο στο $[0, \pi]$ και $g(\pi) = e^{-\pi}$.
- Αν $\int_0^\pi (g(x) + g'(x)) \cdot e^x dx = 2$ να βρεθεί το $g(0)$.