

Θέματα Μαθηματικών 1^{ης} Δέσμης 1989

- ZHTHMA1** A. Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} x + \lambda(y + z) = 0 \\ -2y + z = \lambda x \\ \lambda x + y = -z \end{cases}$$
- ZHTHMA2** A. Να αποδειχθεί ότι κάθε n -οστή ρίζα της μονάδας είναι της μορφής $\zeta_n = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$.
B. Να λυθεί η εξίσωση στο σύνολο \mathbb{C} των μιγαδικών $z^6 + 2z^5 + 2z^4 + 2z^3 + z^2 + (z+1)^2 = 0$.
- ZHTHMA3** A. Να αποδειχθεί ότι αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f'(x) = 0$ τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο Δ .
B. Έστω f, g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ για τις οποίες υποθέτουμε ότι :
i) είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο Δ
ii) $f'' = g''$ και
iii) $0 \in \Delta$ και $f(0) = g(0)$
Να δείχθεί ότι :
α) Για κάθε $x \in \Delta$, $f(x) - g(x) = cx$ όπου $c \in \mathbb{R}$
β) Αν η $f(x) = 0$ έχει δυο ρίζες ετερόσημες ρ_1, ρ_2 τότε η $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο κλειστό διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.
- ZHTHMA4** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \eta \mu \left(2x + \frac{\pi}{2} \right)$ και πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$.
α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $x_0 = \frac{\pi}{8}$.
β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραπάνω εφαπτομένη, τη γραφική παράσταση της f και τους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy .