Θεμα Γ

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$.

$f(x)\neq 0$, $\quad \dfrac{xf'(x)}{f(x)} = x^2-1$, $x>0$.

$f(1)>0$, $\quad (f(1))^{2x} \geq x+1$, καθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. $\dfrac{xf'(x)}{f(x)} = x^2-1 \overset{x\neq 0}{\Longrightarrow} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = x - \dfrac{1}{x} \Rightarrow$

$$(\ln f(x))' = \left(\frac{x^2}{2} - \ln x\right)'$$

$\ln f(x)$, $\dfrac{x^2}{2} - \ln x$ συνεχεις στο $(0,+\infty)$.

αρα απο συνέπειες ΘΜΤ ισχυει:

$$\ln f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln x + c \overset{x=1}{\Longrightarrow} \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - 0 + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c=0$$

αρα $\ln f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \ln x \Rightarrow \ln f(x) = \dfrac{x^2-2\ln x}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = e^{\frac{x^2-2\ln x}{2}} = e^{\frac{x^2}{2}-\ln x} = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{e^{\ln x}} = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{x}$$

$A_f=(0,+\infty)$

Επισης $f(1)>0$ και $f(x)\neq 0$.

Επειδή η f συνεχής στο A_f η f διατηρεί μονοτονία σε όλο το A_f, δηλαδή $f(x)>0$ ή $f(x)<0$ στο A_f

Επειδή $f(1)>0$ η $f(x)>0$ για κάθε $x\in A_f$.

Γ_1. $(f(1))^{2x} \geq x+1 \Rightarrow (f^2(1))^x \geq x+1$

~~Θέτω $g(x)=$~~ ~~$g(x)=\mu^{2x}-x-1$~~ ~~$g'(x)=2\mu^{2x}\cdot \ln 2x-1$~~

ισχύει ότι $e^x \geq x+1$
$x \in \mathbb{R}$

άρα $f^2(1)=e \Rightarrow$
$f(1)=\sqrt{e}$
ή
$f(1)=-\sqrt{e}$
απορρ. αφού
$f(1)>0$.

Γ_3. $F(1)=0$.

α) Αφού F αρχική της $f: (0,+\infty)$ ισχύει ότι $F'(x)=f(x)$.
Συνεπώς πιθανά σημεία καμπής αναζητάμε στα εσωτερικά σημεία $(0,+\infty)$ στα οποία η $F''(x)=0$ ή η $f'(x)=0$.

$$f'(x)=\frac{xe^{\frac{x^2}{2}}\cdot x-e^{\frac{x^2}{2}}}{x^2}=\frac{e^{\frac{x^2}{2}}(x^2-1)}{x^2}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \boxed{x=1}$ ή $x=-1$
απορρ. αφού $A_f=(0,+\infty)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$F(x)$	‖	$\frown$		$\smile$	

Σ.Κ.
$A(1,F(1))$
$A(1,0)$.

β $F(x) \leq (x-1)f(x) \overset{x>1}{\Rightarrow} \frac{F(x)}{x-1} < f(x)$.

Έστω F ορισμένη συνεχής $[1,x]$ και παρ/μη $(1,x)$.
Ισχύει ΘΜΤ, υπάρχει τουλ. ένα $\xi \in (1,x)$ ώστε $F'(\xi)=\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$

$\Rightarrow F'(\xi)=\frac{F(x)}{x-1}$.

Επειδή η $F \cup$ στο $[1,+\infty)$ η $F' \nearrow_{[1,+\infty)}$

άρα : $x > \xi \overset{F'\nearrow}{\Rightarrow} F'(x) > F'(\xi) \Rightarrow f(x) > \dfrac{F(x)}{x-1} \Rightarrow$

$$f(x)(x-1) > F(x)$$

Για ~~x=1~~ :

Για $x=1$: $F(1) = 0$

$(x-1)f(x) = 0$

άρα $F(x) = (x-1)f(x)$

Άρα για $x \geq 1$: $f(x)(x-1) \geq F(x)$

Γ4.	
F $x'x$ $x=2$	Ν.δ. ότι $E(\Omega) < \dfrac{F(2)}{2}$

$F(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ προφανής ρίζα αφού $F(1) = 0$.
από δεδομένα

Επίσης $F'(x) = f(x)$ και έχουμε αποδείξει από ερώτημα (Β) ότι $f(x) > 0$ άρα $F'(x) > 0$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$
άρα $F \nearrow_{[0,+\infty)}$

Άρα $x=1$ μοναδική ρίζα

$x \geq 1 \overset{F\nearrow}{\Longrightarrow} F(x) \geq F(1) \Rightarrow F(x) \geq 0$, "=" μόνο για $x=1$

άρα $F(x) \geq 0$, για $x \in [1,2]$

$E(\Omega) = \int_1^2 F(x)\,dx$ επίσης από Γ3β:

$F(x) \leq (x-1)f(x) \Rightarrow \int_1^2 F(x)\,dx \leq \int_1^2 (x-1)f(x)\,dx$

$$\int_1^2 (x-1) f(x)dx = \int_1^2 x f(x) - f(x)dx = \int_1^2 x f(x)dx - [F(x)]_1^2 =$$

$$= \int_1^2 x f(x) dx - F(2) =$$

$$= [x F(x)]_1^2 - \int_1^2 F(x)dx - F(2) =$$

$$= 2F(2) - F(2) - \int_1^2 F(x)dx$$

Άρα: $\int_1^2 F(x)dx \le F(2) - \int_1^2 F(x)dx \Rightarrow$

$$2\int_1^2 F(x)dx \le F(2) \Rightarrow$$

$$\int_1^2 F(x)dx \le \frac{F(2)}{2}.$$

Επειδή η $F(x)=0$ μόνο για $x=1$

$$\int_1^2 F(x)dx < \frac{F(2)}{2} \Rightarrow E(\Omega) < \frac{F(2)}{2}.$$