

Θέμα Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο και $f(1) = 0$ και η συνάρτηση g συνεχής στο \mathbb{R} και περλιτή.
 016 έχει η σχέση: $\int_a^b (x^2 f'(x) - 1 + \ln x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ με $0 < a < b$ (II)

Δ1.

Να αποδείξετε ότι: (α) $\int_a^b g(x) dx = 0$

$$(β) f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$$

Δ2.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{f(3) - f(2)}{x-1} + \frac{1 - e f(x)}{e^{x+1} - e} = 0$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$

Δ3.

Με δεδομένο ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$, να βρεθεί ο $v \in \mathbb{N}$ με $v > 3$ ώστε: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(v^2 x)}{2^v x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2020^{f(x)} + 2021^{f(x)}}{2020^{f(x)} - 2021^{f(x)}}$

Δ4.

Να αποδείξετε ότι: $\int_0^1 f(x^2 + 1) dx \leq 1 - \ln 2$