ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΠΕΝΔΥΣΕΩΝ

ΚΕΦ. 4

Δάνεια και Χρηματοροές Επενδύσεων

Ε.Φ. Μαγείρου

Επιμέλεια σημειώσεων: Δ. Κ. Βασιλάκης

ΕΛΛΑΔΑ 2008
Ανάπτυξη παντού. Ανάπτυξη για όλους.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΤΑΜΕΙΟ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

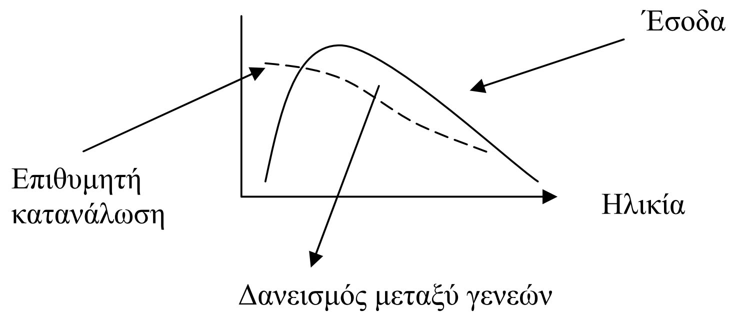
ΠΑΙΔΕΙΑ ΜΠΡΟΣΤΑ
2ο Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

4.1 Γενικά

<u>Γιατί δανείζεται κανείς;</u>

- Καταναλωτικοί λόγοι:

Διαφορετικές προτιμήσεις κατανάλωσης – Διαφορετικά εισοδήματα μεταξύ ατόμων διαφορετικών ηλικιών.



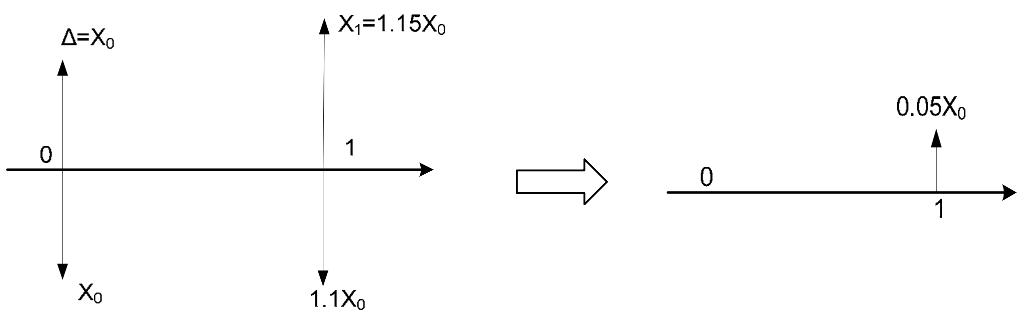
- Επιχειρηματικοί Λόγοι:

Ο Δανεισμός (με γνωστούς όρους): Αυξάνει την αναμενόμενη απόδοση αλλά αυξάνει και τον κίνδυνο των επιχειρηματικών δραστηριοτήτων. Αν έχουμε αύξηση απόδοσης χωρίς κίνδυνο τότε δημιουργείται ευκαιρία Arbitrage.

Τα φαινόμενα αυτά οδηγούν στην ορολογία <u>Μόχλευση</u> (Leverage) για τον δανεισμό.

<u>Παράδειγμα Arbitrage με δανεισμό:</u>

Επένδυση μιας περιόδου αποδίδει 15% (βέβαιο). Αν μπορούμε να δανειστούμε ολόκληρο το απαιτούμενο κεφάλαιο προς 10% έχουμε:



Αυτό δείχνει ότι χωρίς δαπάνη κεφαλαίου έχουμε έσοδο 5% X_0 ως εξής:

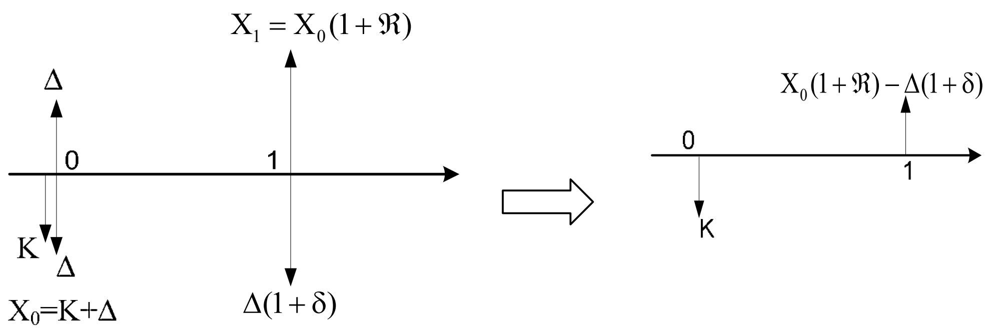
Δανείζομαι ποσό X_0 που οφείλω να ξεπληρώσω στην περίοδο 1 πληρώνοντας $1.10X_0$ (περίοδος: έτος). Τοποθετώ το ποσό του δανείου X_0 στην επενδυτική ευκαιρία που μου δίνει $1.15\ X_0$ την περίοδο 1. Από το ποσό αυτό πληρώνω το δάνειο και έχω κέρδος $5\%\ X_0$ $(=1.15X_0 - 1.10X_0)$ χωρίς δαπάνη κεφαλαίου.

Αν υπάρχουν <u>πολλές</u> τέτοιες πανομοιότυπες επενδύσεις, έχω δυνατότητα απεριόριστου πλουτισμού χωρίς κίνδυνο και δαπάνη κεφαλαίου (Arbitrage).

Η αρχή έλλειψης Arbitrage λέει ότι δεν μπορεί να διαρκέσει πολύ η επαναληψιμότητα αυτή!

<u>Αλγεβρική παρουσίαση:</u>

Γενικά το ύψος δανεισμού δεν καλύπτει πλήρως τις δαπάνες επένδυσης. Αν $\Re$ η απόδοση επένδυσης μιας περιόδου (έτους) και δ το επιτόκιο δανείου ύψους Δ, έχουμε:



Η αρχική δαπάνη X_0 καλύπτεται από ίδιο κεφάλαιο K και δάνειο Δ.
Τα καθαρά έσοδα στην περίοδο 1 είναι: $X_1 - \Delta\ (1+\delta) = X_0(1+\Re) - \Delta(1+\delta)$. Η απόδοση επί των κεφαλαίων είναι:

$$i_{\text{επένδυση με μόχλευση}} = \frac{X_0(1+\Re) - \Delta(1+\delta) - K}{K} =$$

$$= \frac{(K+\Delta)(1+\Re) - \Delta(1+\delta) - K}{K} =$$

$$= (1+\frac{\Delta}{K})\Re - \delta\frac{\Delta}{K} = \Re + \frac{\Delta}{K}(\Re - \delta)$$

Δηλαδή: $\boxed{i_{\text{επ. μόχλευση}} = \Re + \frac{\Delta}{K}(\Re - \delta)}$

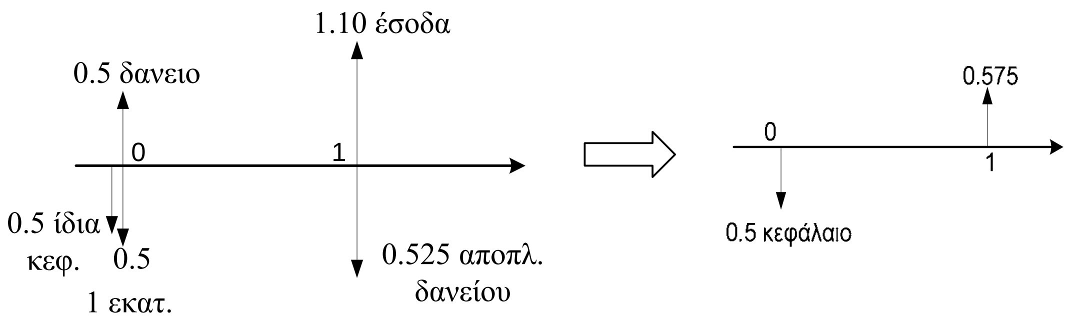
Παράδειγμα:

Επένδυση έχει απόδοση 10% και απαιτεί αρχική δαπάνη 1 εκατ. €. Μπορούμε να δανειστούμε έως και 0.5 εκατ.€ με επιτόκιο 5%. Ποια η απόδοση της επένδυσης με μόχλευση;

Είναι $K=\Delta=0.5$ εκατ. $\Re=10\%$ $\delta=5\%$

Οπότε: $i_{\text{επενδ. μόχλ.}} = 10\% + 1\,(10\% - 5\%) = 15\%$

Όπως φαίνεται και στο χρονικό διάγραμμα:



Τελικά:

$$\text{Απόδοση} = \frac{0.575 - 0.500}{0.500} = 15\%$$

□

Από τον τύπο φαίνεται ότι αν $\Re > \delta$ ο δανεισμός αυξάνει την απόδοση των ίδιων κεφαλαίων. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που ακόμα και αν $\delta > \Re$ συμφέρει ο δανεισμός, καθώς μας επιτρέπει να εκμεταλλευτούμε «Οικονομίες Κλίμακος» (δηλαδή μεγάλες επενδύσεις υψηλότερης απόδοσης).

Παράδειγμα:

Διαθέτουμε 0.5 εκατ. € που μπορούμε να τα τοποθετήσουμε προς 7%. Μπορούμε να δανειστούμε μέχρι 0.5 εκατ. € με επιτόκιο 20%. Έστω ότι υπάρχει και επένδυση αρχικής δαπάνης 1 εκατ. € που αποδίδει 15%. Τι θα κάνουμε;

Αν δανειστούμε για να αναλάβουμε την επένδυση θα απαιτηθεί δάνειο 0.5 εκατ. € ($\Delta / K = 1$) και η απόδοση θα είναι:

$$i_{\text{επ. μόχλευση}} = \Re + \frac{\Delta}{K}(\Re - \delta) = 15\% + 1\big(15\% - 20\%\big) = 10\%$$

που είναι προτιμότερο από το 7% που έχουμε εναλλακτικά. Άρα δανειζόμαστε παρόλο που η απόδοση της αρχικής επένδυσης μειώνεται!

□

4.2 Σχέση Μόχλευσης - Κινδύνου

Σε περίπτωση που η απόδοση της επένδυσης $\Re$ είναι αβέβαιη, τότε ο δανεισμός αυξάνει τον κίνδυνο της επένδυσης. Εάν π.χ. αναμένουμε απόδοση με $E(\Re)$=10% και έχουμε επιτόκιο δανεισμού δ=5%, τότε εάν Δ=Κ, η απόδοση είναι με μόχλευση 15% σε περίπτωση πραγματοποίησης της επένδυσης. Αν όμως η εκ των υστέρων απόδοση είναι $\Re$=5% (θυμηθείτε εδώ η απόδοση είναι αβέβαιη) η απόδοση με μόχλευση είναι πάλι 5%. Ακόμη χειρότερα αν η τελική απόδοση είναι κάτω από 5%, η επένδυση με μόχλευση είναι χειρότερη, διότι αν π.χ. τελικά $\Re$=3% η επένδυση με μόχλευση αποδίδει μόλις 1%, χειρότερο από την μη μοχλευμένη απόδοση.

Αναμενόμενη απόδοση με μόχλευση (με χρήση στοιχειωδών πιθανοτήτων):

Έστω ότι η απόδοση της επένδυσης είναι τυχαία μεταβλητή $\Re$ που έχει αναμενόμενη τιμή $\overline{\Re}$ και τυπική απόκλιση σ>0. Τότε η απόδοση της επένδυσης με μόχλευση είναι και αυτή τυχαία μεταβλητή:

$$i_{\mu o\chi\lambda} = \left(1+\frac{\Delta}{K}\right)\cdot\Re - \delta\cdot\frac{\Delta}{K}$$

με αναμενόμενη τιμή: $$\bar{i} = E(i) = (1+\frac{\Delta}{K})\overline{\Re} - \delta\frac{\Delta}{K} \qquad (1)$$

και τυπική απόκλιση: $$\sigma_i = \left|1+\frac{\Delta}{K}\right|\cdot\sigma = \left(1+\frac{\Delta}{K}\right)\cdot\sigma \qquad (2)$$

(εφόσον Δ/Κ>0 η απόλυτη τιμή δεν χρειάζεται)

Αν θεωρήσουμε ότι η σ_i μετρά τον κίνδυνο, το διάγραμμα κινδύνου – απόδοσης είναι χρήσιμο στους επενδυτές.
Από τις σχέσεις (1) και (2) για τα $\bar{i}$, σ_i, απαλείφοντας το Δ/Κ έχουμε την σχέση:

$$\boxed{\bar{i} = \delta + \sigma_i\cdot\frac{\overline{\Re}-\delta}{\sigma}} \quad \text{(θεωρούμε: } \overline{\Re} > \delta\text{)}$$

Αν $\sigma_i = \sigma$ αυτό σημαίνει ότι Δ=0 από την (2) (άρα δεν έχουμε μόχλευση), οπότε $\bar{i} = \overline{\Re}$. Αν θέλουμε μεγάλες αποδόσεις με μόχλευση $\bar{i}$, ο τύπος δείχνει ότι οι υψηλές αποδόσεις θα συνοδεύονται αναγκαστικά από υψηλές τιμές κινδύνου σ_i!

Παράδειγμα:
Έστω επένδυση με $\overline{\Re}$=10%, σ=20% ενώ υπάρχει δυνατότητα δανεισμού προς δ=5%
Είναι:
$\bar{i}$=5% + σ_i 0.25 (αναμενόμενη απόδοση με μόχλευση)
Αν λοιπόν επιθυμούμε απόδοση 15% θα πρέπει να συμβιβαστούμε με κίνδυνο σ_i=25%.
□

Προσοχή:

Μικρότερες τιμές του κινδύνου προκύπτουν αν $\Delta/K<0$ (από την σχέση (2)) που ερμηνεύεται ως εξής:

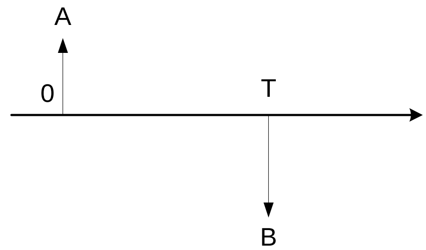
Τοποθετούμε χρήματα στην επένδυση και σε ένα λογαριασμό κατάθεσης, δηλαδή παίρνουμε δάνειο αρνητικού ύψους.

Αν π.χ. $\frac{\Delta}{K} = -\frac{1}{2}$: (1) => $\bar{i} = \frac{\overline{\Re} + \delta}{2}$ (2) => $\sigma_i = \frac{\sigma}{2}$

Τότε τοποθετούμε K στην επένδυση και $K/2$ δανείζοντας με βέβαιη απόδοση δ. Ο κίνδυνος υποδιπλασιάζεται ενώ η αναμενόμενη απόδοση μειώνεται στον μέσο όρο επένδυσης – τοποθέτησης.

4.3 Συμβάσεις αποπληρωμής – Εξόφληση δανείων

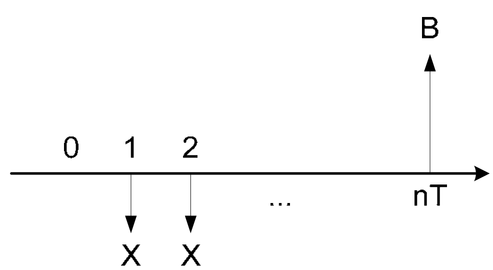
4.3.1 Απλούστερη σύμβαση



Έμμεσος ορισμός επιτοκίου:

- Απλού τόκου: $i_{\Delta} = \frac{1}{T}\frac{B-A}{A}$
- Σύνθετου τόκου: επιτόκιο $\overset{\Delta}{j}(n)$ αν $A \cdot \left(1 + \frac{\overset{\Delta}{j}(n)}{n}\right)^{nT} = B$

Ο δανειζόμενος συχνά δημιουργεί κεφάλαιο για πρόβλεψη αποπληρωμής του B. Αν τοποθετεί ίσα ποσά σε λογαριασμό $\overset{T}{j}(n)$, το σταθερό ποσό X πρέπει να ικανοποιεί:



$$X \cdot S(nT, \frac{j^{T}(n)}{n}) = B \Rightarrow X = B \cdot S^{-1}(nT, \frac{j^{T}(n)}{n})$$

ο συντελεστής S^{-1} ονομάζεται <u>συντελεστής χρεωλυσίας.</u>

<u>Παράδειγμα:</u>
Δάνειο 100.000 € εξοφλείται με μια πληρωμή ύψους 150.000 € σε 2 έτη.
Ποιο το επιτόκιο του δανείου με απλό τόκο; Με σύνθετο τόκο εξαμηνιαίας κεφαλαιοποίησης;
Ποιο το ποσό μηνιαίας χρεωλυσίας με $\overset{T}{j}(12) = 10\%$;

- Το επιτόκιο απλού τόκου είναι:
  $$i^{\Delta} = \frac{1}{2}\frac{150-100}{100} = 25\%$$
- Με εξαμηνιαία κεφαλαιοποίηση:

$$100\left(1+\frac{j^{\Delta}(2)}{2}\right)^4 = 150 \;\Rightarrow\; \overset{\Delta}{j}(2) = 2\left(\sqrt[4]{1.5}-1\right) = 21.34\%$$

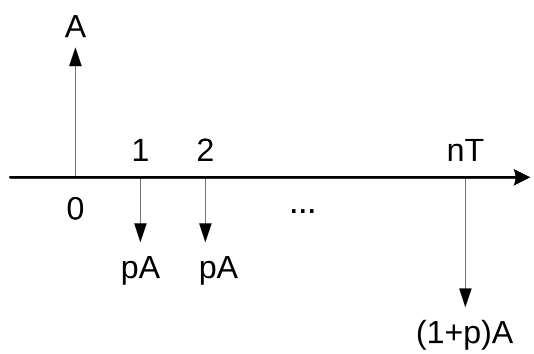
- Το ποσό μηνιαίας χρεωλυσίας είναι:

$$X = 150 \cdot S^{-1}(24, \frac{10\%}{12}) = 150\left[\frac{1.00833^{24}-1}{0.00833}\right]^{-1} = 5.672$$

□

4.3.2 Εξόφληση με πολλές πληρωμές

Σε δάνειο ύψους A συμφωνείται συχνά πληρωμή τόκων n φορές το έτος με επιτόκιο (ετήσιο) $\overset{\Delta}{j}_{(n)}$.
Στην «λήξη» του δανείου σε π.χ. 7 έτη, πληρώνονται οι τόκοι της τελευταίας περιόδου ΣΥΝ το ύψος του δανείου A.



$$p = \frac{\overset{\Delta}{j}_{(n)}}{n}$$

π.χ. αν $\overset{\Delta}{j}_{(2)} = 10\%$, A=1 εκατ. € και το δάνειο εξοφλείται σε 5 έτη, κάθε εξάμηνο καταβάλλονται 50 χιλ. €. Στο τέλος της πενταετίας καταβάλλονται 1.05 εκατ. €.

Σε περίπτωση που επιθυμείται πλήρης εξομάλυνση των πληρωμών, μπορεί να δημιουργηθεί χρεωλυσία για το A αν η τοποθέτηση έχει ίδια συχνότητα όπως το δάνειο και επιτόκιο $\overset{T}{j}_{(n)}$.

Η σταθερή πληρωμή είναι: $\left[\frac{j^{\Delta}{}_{(n)}}{n} + S^{-1}\left(nT, \frac{j^{T}{}_{(n)}}{n}\right)\right] \cdot A$

Αν $\overset{\Delta}{j}_{(n)} = \overset{T}{j}_{(n)}$ και $p = \frac{\overset{T}{j}_{(n)}}{n}$ ισχύει ότι $p + S^{-1}(M,p) = \alpha^{-1}(M,p)$ (γιατί;)

Παράδειγμα:

$\overset{T}{j}_{(2)} = 8\%$ $\overset{\Delta}{j}_{(2)} = 10\%$ $T = 5$ έτη

Ύψος δανείου 100 χιλ. €. Ποιο το εξομαλυμένο ποσό αποπληρωμής;

$$100 \cdot \left[\frac{10\%}{2} + S^{-1}(10,4\%) \right] = \underbrace{5}_{\text{τόκοι}} + \underbrace{8.33}_{\text{χρεωλύσιο}}$$

□

Μεταβαλλόμενο επιτόκιο

Η προηγούμενη μέθοδος εφαρμόζεται και για μεταβαλλόμενο επιτόκιο σύμφωνα με κάποια σύμβαση: π.χ. τόκοι πληρώνονται για το προηγούμενο εξάμηνο με επιτόκιο ίσο με το μέσο EURIBOR (**E**uro **I**nterbank **O**ffer **R**ate) προσαυξημένο με 0.5% (50 basis points). Έτσι αν το EURIBOR του προηγουμένου εξαμήνου ήταν 2.50%, δάνειο 1 εκατ. €, θα πληρώσει τους τόκους $(2.5 + 0.5) \cdot \frac{1}{2} \cdot 1\text{εκατ.} = 15000€$

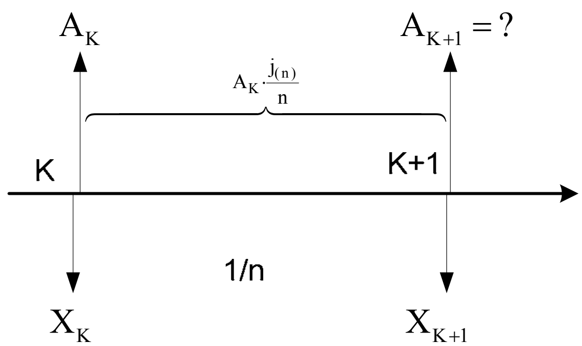
Αν το επόμενο εξάμηνο το EURIBOR λήξει στο 1.5% οι τόκοι θα είναι 10.000 €.

4.4 Αποπληρωμή με τμηματική εξόφληση κεφαλαίου

Ορισμένες συμβάσεις επιτρέπουν να εξοφλείται το ποσό (κεφάλαιο) το δανείου τμηματικά. Έτσι οι τόκοι υπολογίζονται σε μικρότερο ύψος κεφαλαίου.

Αν A_K το ύψος κεφαλαίου <u>αμέσως</u> μετά την K πληρωμή X_K, τότε θα έχουμε μια αναδρομική σχέση για τα A_K.

Έστω ότι περίοδοι υπολογισμού δανείου είναι το $1/n$ έτους, επιτόκιο $j_{(n)}$. Τότε οι τόκοι την $K+1$ περίοδο είναι $A_K \cdot \frac{j_{(n)}}{n}$.



Το υπόλοιπο μετά την πληρωμή X_{K+1} είναι A_{K+1}. Είναι εύλογο η πληρωμή X_{K+1} να «εξοφλήσει» πρώτα τόκους, η δε διαφορά $X_{K+1} - \frac{j_{(n)}}{n} \cdot A_K$ να μειώσει το υπόλοιπο κεφάλαιο αν είναι θετική, διαφορετικά να αυξήσει το κεφάλαιο (να θεωρηθεί καινούριο δάνειο). Έχουμε τότε:

$$A_{K+1} = A_K - (X_{K+1} - \frac{j_{(n)}}{n} \cdot A_K) \quad \text{με } p = \frac{j_{(n)}}{n}$$
$$A_{K+1} = A_K(1+p) - X_{K+1}$$

Προφανώς θέτουμε A_0 : ποσό δανείου.
Το δάνειο λήγει σε N πληρωμές, αν βέβαια $A_N = 0$ (και $A_1, A_2, \ldots, A_{N-1} > 0$).

Η παραπάνω σχέση είναι εξίσωση διαφορών πρώτης τάξεως με σταθερούς συντελεστές αν το επιτόκιο είναι σταθερό. Διαφορετικά έχουμε πάλι Ε.Δ. πρώτης τάξης γραμμική με μεταβαλλόμενους συντελεστές: $A_{K+1} = (1+p_K)A_K - X_{K+1}$, που επίσης λύνεται εύκολα.

Εφεξής θεωρούμε τα p_K σταθερά.

<u>Η λύση της Ε.Δ. είναι:</u>

$$\boxed{A_K = A_0(1+p)^K - \sum_{j=1}^{K}(1+p)^{K-j} \cdot X_j}, \text{ για } K=1,2,\ldots,N$$

Εφόσον στη λήξη A_N=0, πρέπει:

$$A_N = 0 = A_0(1+p)^N - \sum_{j=1}^{N}(1+p)^N \cdot \frac{X_j}{(1+p)^j}$$

=> (Άλγεβρα) $A_0 = \sum_{j=1}^{N}\frac{X_j}{(1+p)^j}$ με προφανή ερμηνεία.

επίσης ισχύει:

$$\boxed{A_K = \sum_{j=K+1}^{N}\frac{X_j}{(1+p)^{j-K}}}$$

Δηλαδή αν το δάνειο εξοφλείται σε N πληρωμές τότε το K-υπόλοιπο ισούται με την παρούσα αξία των επόμενων πληρωμών μέχρι τη λήξη του!

Παρατήρηση:

Για τον δανειστή το δάνειο είναι μια επένδυση με (προφανώς) IRR ίσο με $\frac{j_{(n)}}{n}$!

4.4.1 Εξόφληση με ίσες πληρωμές

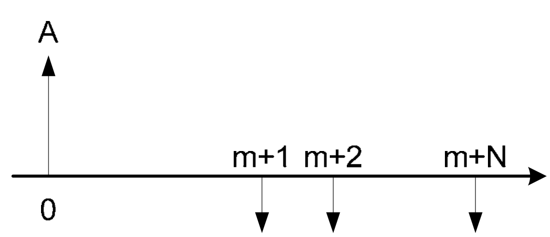
Αν η εξόφληση γίνει σε N ίσες πληρωμές $X_K = X$, για κάθε $K = 1,\ldots,N$ θα πρέπει:

$$A = \sum_{j=1}^{N}\frac{X_j}{(1+p)^j} = X \cdot \alpha(N,p) \qquad \text{ή} \qquad \boxed{X = A \cdot \alpha^{-1}(N,p)}$$

Το α^{-1} ονομάζεται συντελεστής ανάκτησης κεφαλαίου.

Περίοδος χάριτος:

Αν οι δόσεις καθυστερήσουν κατά m περιόδους (m : περίοδος χάριτος)



Θα πρέπει:

$$A = \frac{X \cdot \alpha(N,p)}{(1+p)^m} \qquad \text{ή} \qquad X = A \cdot (1+p)^m \cdot \alpha^{-1}(N,p) \qquad \text{με } p = \frac{j_{(n)}}{n}.$$

Παραδείγματα:

1. Δάνειο 100χιλ.€ με $j_{(1)}$=10% εξοφλείται σε 5 έτη. Γίνεται μια πληρωμή 30 χιλ.€ σε 2 έτη και μια τελική σε 5 έτη. Ποιο το ποσό;

Πρέπει: $100 = \frac{30}{1.10^2} + \frac{X_5}{1.10^5} \Rightarrow X_5 = 121.1$ χιλ.€

Το άθροισμα των πληρωμών είναι $X_2 + X_5 = 30 + 121.1 = 151.1$ χιλ.€

□

2. Το ίδιο δάνειο σε ίσες πληρωμές. Ποιο το X και το άθροισμα των πληρωμών;

$X \cdot \alpha(5, 0.10) = 100 \Rightarrow X = 26.4$ χιλ.€ με άθροισμα $X_1+X_2+\ldots= 5\ X = 132$ χιλ.€

Σαφώς μικρότερο από το προηγούμενο. (Γιατί;)

□

3. Το ίδιο δάνειο εξοφλείται σε 5 ετήσιες ίσες πληρωμές με περίοδο χάριτος 2 έτη (πρώτη πληρωμή σε 3 έτη)

Προφανώς: $X = 26.4 \cdot 1.10^2 = 31.9$ χιλ.€

□

4.4.2 Πίνακας Αποπληρωμής Δανείου

Ο επιμερισμός όλων των πληρωμών σε τόκους – χρεωλυσία αναφέρεται ως πίνακας αποπληρωμής του δανείου.

Προσοχή:

Η εφορία θεωρεί τους τόκους ενός δανείου ως τρέχοντα έξοδα (που μειώνουν τα κέρδη και άρα τους φόρους του οικονομικού έτους). Τα χρεωλύσια ΔΕΝ θεωρούνται ως έξοδα, καθώς το ποσό του δανείου -που ισούται με τα χρεωλύσια- έχει ήδη ενσωματωθεί στις αποσβέσεις που μειώνουν τον φόρο.

(βλ. επόμενα εδάφια).

Παράδειγμα πίνακα αποπληρωμής (για παράδειγμα 2)

A_0 =100 χιλ. $j_{(1)}$ = 10% Λήξη: 5 έτη

Περίοδος	Πληρωμή	Τόκοι	Χρεωλύσιο	Ανεξόφλητο Υπόλοιπο
0	-	-	-	100.00
1	26.38	10.00	16.38	83.62
2	26.38	8.36	18.02	65.60
3	26.38	6.56	19.82	45.78
4	26.38	4.58	21.80	23.98
5	26.38	2.40	23.98	∅

□

Στον πίνακα:

- Η πληρωμή ισούται με $100\ \alpha^{-1}(5, 10\%)$.
- Οι τόκοι υπολογίζονται από το ανεξόφλητο υπόλοιπο επί $\frac{j_{(n)}}{n} = 0.10$.
- Το χρεωλύσιο είναι η πληρωμή μείον τόκοι.
- Το επόμενο υπόλοιπο είναι το προηγούμενο μείον το χρεωλύσιο.

Προφανής υλοποίηση σε φύλλο λογισμικού!

Ίδιο παράδειγμα αλλά μηνιαίες δόσεις και $j_{(12)}$ = 10% (χωρίς περίοδο χάριτος) και διάρκεια 5 ετών.

$$N = 12 \cdot 5 = 60 \text{ και } p = \frac{10\%}{12} = 0.00833$$

Άρα:

$$X = 100 \cdot \alpha^{-1}\left(60, 0.833\%\right) = 100 \cdot \frac{0.00833}{1 - 1.00833^{-60}} = \frac{100}{47.083} = 2.124€$$

Το άθροισμα των πληρωμών είναι $60 \cdot 2.124 = 127.44$. Δεδομένου ότι το ύψος του δανείου ήταν 100, το υπερβάλλον ποσό 127.44 – 100.00 = 27.44 χιλ.€ οφείλεται σε πληρωμές τόκων.

4.4.3 Επιμερισμός πληρωμών – Τόκοι, Χρεωλυσία

Από την σχέση αναδρομής έχουμε:

$$X_{K+1} = \underbrace{pA_K}_{\text{τόκοι}} + \underbrace{\left(A_K - A_{K+1}\right)}_{\text{χρεωλύσιο}}$$

Όπου γράφουμε $C_{K+1} = A_K - A_{K+1}$ το K+1 χρεωλύσιο

Προφανώς:

$C_1 + C_2 + \ldots + C_N = A_0 - A_1 + A_1 - A_2 + \ldots + A_{N-1} - A_N = A_0 - A_N$

ή γενικά:

$C_1 + C_2 + \ldots + C_k = A_0 - A_K$

Παρατηρήσεις:

Διαπιστώνεται στον πίνακα ότι:

$$\frac{C_{K+1}}{C_K} = 1.10 = 1 + p \qquad \text{(γιατί;)}$$

Διότι αν $X_K = X_{K+1}$ είναι:

$X_K = pA_{K-1}+C_K = pA_K + C_{K+1} = X_{K+1} \Rightarrow C_K+p(A_{K-1}-A_K) = C_{K+1} \Rightarrow$

$C_K+pC_K = C_{K+1}$

Ή τέλος: $C_{K+1} = (1+p)\, C_K$

Το «πρώτο» χρεωλύσιο C_1 είναι $X-pA_0 = A_0\, \alpha^{-1}(N, p)-pA_0 = A_0\, [\alpha^{-1}(N, p)-p]$
που ισούται με $A_0\, S^{-1}(N,p)$ καθώς ισχύει ότι $\alpha^{-1}(N,p)=S^{-1}(N,p)+p$

Άρα είναι:

$$C_K = A_0 \frac{(1+p)^{K-1}}{S(N,p)}$$ (για ίσες πληρωμές και μόνο)

Πως υπολογίζεται το K ανεξόφλητο υπόλοιπο σε ίσες πληρωμές:

$$A_K = A_0 - \left[C_1 + C_2 + ... + C_K\right] =$$

$$= A_0 - \frac{A_0}{S(N,p)}\left[1 + (1+p) + (1+p)^{K-1}\right] =$$

$$= A_0 \cdot \left[1 - \frac{S(K,p)}{S(N,p)}\right]$$

Με Παρούσα Αξία πληρωμών υπολογίζεται και με τους συντελεστές α( ).

4.4.4 Εξόφληση με ίσα χρεωλύσια

Μια άλλη σύμβαση αποπληρωμής που είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε μεταβλητά επιτόκια είναι η εξής:

Πολλές φορές συμφωνείται η αποπληρωμή να γίνεται με ίσα χρεωλυσία. Κάθε πληρωμή είναι το χρεωλύσιο συν τόκους, που είναι μεταβλητοί ακόμη και με σταθερό επιτόκιο λόγω μείωσης του κεφαλαίου.
Αν η εξόφληση είναι σε N πληρωμές το κάθε χρεωλύσιο θα είναι:

$$\boxed{C_K = \frac{A}{N}} \qquad K= 1,2,\dots,N$$

Παράδειγμα πίνακα αποπληρωμής:

$j_{(1)}$=10%   A=100 χιλ.€   N=5 (έτη)

Περίοδος	Πληρωμή	Τόκοι	Χρεωλυσία	Υπόλοιπο
0	-	-	-	100.00
1	30.00	10.00	20.00	80.00
2	28.00	8.00	20.00	60.00
3	26.00	6.00	20.00	40.00
4	24.00	4.00	20.00	20.00
5	22.00	2.00	20.00	$\varnothing$

Πληρωμές, τόκοι, υπόλοιπα, είναι <u>αριθμητικές πρόοδοι</u> (Α.Π.).

Άθροισμα τόκων: $\frac{10+2}{2}\cdot 5 = 30$ χιλ. €

Άθροισμα πληρωμών $100 + 30 = \text{χρεωλυσία} + \text{τόκοι} = \frac{30+22}{2}\cdot 5$

Όπου: $\text{Άθροισμα όρων Α.Π.}=\frac{\text{πρώτος+τελευταίος}}{2}\cdot \text{αριθμός όρων}$

4.4.5 Δικαίωμα Πρόωρης Εξόφλησης Δανείου

Σε δάνεια σταθερού επιτοκίου ο δανειζόμενος χάνει αν τα επιτόκια μειωθούν, αντίστροφα για τον δανειστή.
Υπάρχουν σε ορισμένα δάνεια όροι πρόωρης εξόφλησης όπου αν το (ανεξόφλητο) υπόλοιπο είναι A_K, το δάνειο εξοφλείται με καταβολή ποσού A_K + ποσό ρήτρας.
Ο όρος της σύμβασης αυτός ενέχει δικαίωμα για τον δανειζόμενο και αναλύεται στην μαθηματική χρηματοοικονομική.

<u>Παράδειγμα:</u>
Σε δάνειο ύψους 100 χιλ. €, ίσων πληρωμών, με $j_{(1)}$=10%, N=5, υπάρχει ρήτρα πρόωρης εξόφλησης +5% επί υπολοίπου. Μετά την 2^{η} πληρωμή παρατηρείται ότι τα επιτόκια μειώθηκαν στο 6% [=$j_{(1)}$]. Συμφέρει η πρόωρη εξόφληση αν ο δανειζόμενος επιθυμεί πάλι ίδια διάρκεια εξόφλησης; (πάλι 5 δόσεις συνολικά).

Το A_2 είναι 65.60 χιλ.€ άρα για εξόφληση πρέπει να καταβληθεί ποσό $\overline{A}_0 = 65.60\cdot 1.05 = 68.88$ χιλ.€

Αν δανειστούμε το $\overline{A}_0$ με $j_{(1)}$=6% και 3 (=5-2) ίσες δόσεις, η νέα δόση ισούται με $X = 68.88\cdot \alpha^{-1}\left(3,6\%\right) = 27.76$ χιλ.€.
Εφόσον η προηγούμενη δόση είναι 26.38 χιλ.€ ΔΕΝ συμφέρει η πρόωρη εξόφληση.

Πόση είναι η πτώση επιτοκίων για την οποία συμφέρει η πρόωρη εξόφληση;

Πρέπει $68.88 \cdot \alpha^{-1}(3,p) \leq 26.38$ ή $\alpha(3,p) \leq \frac{68.88}{26.38} = 2.611$

Είναι $\alpha(3,7\%)=2.624$ $\alpha(3,8\%)=2.577$

Άρα: $p \cong 7\% + \varepsilon$

□

4.5 Χρηματοροές Επενδύσεων

Η χρησιμοποίηση δανείων, η εφαρμογή φορολογίας κ.λ.π. απαιτούν τον λεπτομερή υπολογισμό των καθαρών εσόδων μιας επένδυσης.

Χρηματοροή (cash flow) σημαίνει καθαρή αλλαγή στο ταμείο μιας επιχείρησης κατ' αντιστοιχία χρηματοροή επένδυσης είναι οι αλλαγές στο ταμείο λόγω της επένδυσης σε ένα χρονικό διάστημα (συνήθως έτος…).

Είναι (στο έτος t):

X_t =(χρηματοροές στην διάρκεια του έτους t)=
Έσοδα (πωλήσεων) έτους – Δαπάνες (παραγωγής) – Φόροι έτους ± χρηματοοικονομικά

Τα χρηματοοικονομικά είναι αφ' ενός οι εισπράξεις ποσών δανείου (θετικά) και οι συνολικές πληρωμές (αρνητικά).

Ο υπολογισμός φόρων είναι περίπλοκος.
Θεωρούμε ότι είναι αναλογικός επί των φορολογητέων κερδών.
Φορολογητέα κέρδη είναι τα ακαθάριστα κέρδη (πωλήσεις – έξοδα παραγωγής) μείον αποσβέσεις μείον τόκοι δανείων

Π.χ. με συντελεστή φορολογίας φ (~ 35 - 40% - μειώνεται).

Είναι $[\text{Φόρος}]_t = φ\,([\text{Πωλήσεις}]_t - [\text{Δαπάνες}]_t - [\text{Αποσβέσεις}]_t - [\text{Τόκοι}]_t)$
Άρα:

$$\mathbf{X_t = [Πωλήσεις]_t - [Δαπάνες]_t - φ([Πωλήσεις]_t - [Δαπάνες]_t - [Αποσβέσεις]_t - [Τόκοι]_t) - ([τόκοι]_t + [χρεωλυσία]_t)}$$

Ή

$$\mathbf{X_t = (1-φ)([Πωλήσεις]_t - [Δαπάνες]_t) + φ[Αποσβέσεις]_t - [\,(1-φ)[τόκοι]_t + [χρεωλυσία]_t\,]}$$

Η τελευταία σχέση λέει ότι:
- Οι αποσβέσεις είναι «πηγή» χρηματοροής
- Οι τόκοι «μειώνονται» κατά το ποσοστό φορολογίας.

Άσκηση:
Η παρούσα αξία των καταβολών για ένα δάνειο με τόκους μειωμένους κατά φ ισούται με το ποσό του δανείου με επιτόκιο $(1-φ)p$ (και όχι p). Αποδείξτε το.

Παράδειγμα:
Επένδυση δαπάνης 100 χιλ.€ λειτουργεί για 5 έτη. Οι αρχικές δαπάνες αποσβένονται ισόποσα πάλι σε 5 έτη. Το κόστος παραγωγής είναι 50€/μονάδα και η παραγωγή είναι 1.000 μονάδες

ετησίως, σταθερή στην πενταετία. Η επιχείρηση δανείζεται 50 χιλ.€ που αποπληρώνει με 5 ίσα χρεωλύσια και j(1)=10%. Η φορολογία είναι αναλογική με συντελεστή 40%.
α) Αν η τιμή πωλήσεως είναι 75€/μονάδα, γράψτε την χρηματοροή και υπολογίστε το IRR (στα ίδια κεφάλαια).
β) Ποια τιμή πωλήσεως μονάδος εξασφαλίζει IRR=10%

α) Ο πίνακας ανάλυσης χρηματοροής είναι:

Έτος	Επενδύσεις	Κεφ. Δανείου	Τόκοι Δανείου	Αποσβέσεις	Έσοδα πωλήσεων	Δαπάνες Πωλήσεων	Φορολ. Κέρδη	Φόρος	Χρ/ροή
0	-100	+50	-	-	-	-	-	0	-50
1	-	-10	+5	20	75	50	0	0.0	10.0
2	-	-10	+4	20	75	50	1	0.4	10.6
3	-	-10	+3	20	75	50	2	0.8	11.2
4	-	-10	+2	20	75	50	3	1.2	11.8
5	-	-10	+1	20	75	50	4	1.6	12.4

Το έτος 0 η δαπάνη ίδιων κεφαλαίων είναι 100-50=50.
Το έτος 1 τα φορολογητέα κέρδη είναι (75-50)-20-5 =0
Άρα οι φόροι είναι μηδέν.
Η χρηματοροή το έτος 1 είναι (75-50)-15-0=10
[(ακαθ. έσοδα) – πληρ. δανείου – φόροι]

Αντίστοιχα για τα άλλα έτη
Αν η επένδυση συνεχιζόταν μετά τον χρόνο 5 δεν θα υπήρχε δάνειο και αποσβέσεις. Η χρηματοροή θα ήταν 60% των ακαθάριστων κερδών ($0.6 \cdot 25 = 15$).
Με αριθμ. μεθόδους το IRR στην τελευταία στήλη προκύπτει 3.76%.

β) Αν η τιμή πωλήσεως είναι π, η χρηματοροή X_K (K= 1,……,5) είναι:

$$X_K = 0.6 \cdot (\pi - 50) + \underbrace{0.4 \cdot 20}_{\text{απόσβεση}} - \left[0.6 \cdot \text{Τόκοι}_K + 20\right]$$

Για να έχουμε IRR=10% πρέπει:

$$50 = (0.6\pi - 42) \cdot \alpha(5,10\%) - 0.6\left[\frac{5}{1.1} + \frac{4}{1.1^2} + \frac{3}{1.1^3} + \frac{2}{1.1^4} + \frac{1}{1.1^5}\right]$$

Γιατί;
Είναι γραμμική εξίσωση που λύνεται εύκολα και δίνει π=78.5€

Η χρηματοροή υπολογίζεται (σε χιλ.€) στον πίνακα:

Έτος	Ίδια κεφ.	Χρεωλ.	Τόκοι	Αποσβ.	Ακαθ. Κέρδη	Φορ/τέα Κέρδη	Φόροι	Χρημ/ροή
0	-50	-	-	-	-	-	0	-50
1	-	10	5	20	28.5	3.5	1.4	12.1
2	-	10	4	20	28.5	4.5	1.8	12.7
3	-	10	3	20	28.5	5.5	2.2	13.3
4	-	10	2	20	28.5	6.5	2.6	13.9
5	-	10	1	20	28.5	7.5	3.0	14.5

Που έχει όντως IRR=10% καθώς $\frac{12.1}{1.1}+\frac{12.7}{1.1^2}+...+\frac{14.5}{1.1^5}=50$

Άσκηση:

Για δεκαετή λειτουργία ποια τιμή δίνει IRR=10%; Καταστρώστε και τον πίνακα χρηματοροών.