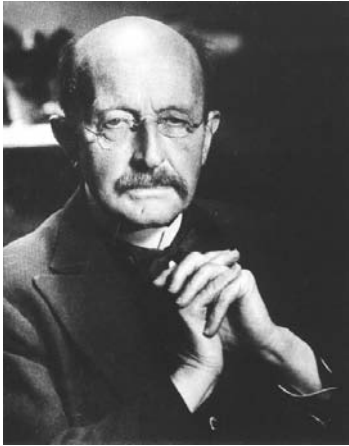




## 7-1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ



**Εικ. 7.1** Max Planck (1858-1947). Γερμανός, θεμελιωτής της κβαντικής θεωρίας. Νόμπελ Φυσικής 1918. Η ζωή του σηματοδεύτηκε από το θάνατο των τεσσάρων παιδιών του στη διάρκεια των δύο παγκοσμίων πολέμων. Αν και ανοιχτά αντίθετος στο ναζιστικό καθεστώς παρέμεινε στη Γερμανία γεγονός που του στοίχισε σε διώξεις μέχρι το τέλος του Β' παγκοσμίου πολέμου.

Ο Maxwell, με την ενοποιημένη θεωρία του για τον ηλεκτρομαγνητισμό (1864), είχε προβλέψει την ύπαρξη των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων ως μηχανισμού διάδοσης της ενέργειας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στο χώρο. Αρκετά χρόνια αργότερα, το 1886, και ενώ ο Maxwell είχε πεθάνει, ο Γερμανός Heinrich Hertz παρήγαγε ηλεκτρομαγνητικά κύματα με ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα και απέδειξε ότι αυτά διαδίδονται στο χώρο με την ταχύτητα του φωτός. Είχε ανοίξει ο δρόμος για τη διερεύνηση της αλληλεπίδρασης ακτινοβολίας και ύλης. Ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα μπορούσε να μεταφέρει ενέργεια σ' ένα άτομο θέτοντάς το σε εξαναγκασμένη ταλάντωση και, αντίστροφα, ένα ταλαντούμενο άτομο, παρήγαγε ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

Η κλασική θεωρία προβλέπει ότι η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία μπορεί να μεταφέρει οποιοδήποτε ποσό ενέργειας, ανάλογα με τη συχνότητά της. Εντούτοις μια σειρά από φαινόμενα, όπως η **ακτινοβολία του μέλανος σώματος, το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, τα γραμμικά φάσματα εκπομπής και το φαινόμενο της σκέδασης των ακτίνων X (φαινόμενο Compton)**, δεν μπορούσαν να ερμηνευτούν με την κλασική θεωρία.

Το 1900 ο Max Planck κάνει την πολύ ριζοσπαστική υπόθεση ότι η ενέργεια εκπέμπεται ή απορροφάται από ένα αντικείμενο κατά διακριτές ποσότητες (κατά κβάντα) ή, πιο απλά, κατά μικρά πακέτα. Η συνολική ενέργεια λοιπόν δεν μπορεί παρά να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του κβάντου ενέργειας. Η υπόθεση αυτή αποδείχθηκε επιτυχής στην αντιμετώπιση των αδιεξόδων στα οποία είχε οδηγηθεί η κλασική θεωρία.

Η κβάντωση ενός μεγέθους δεν μας είναι άγνωστη υπόθεση. Για παράδειγμα το ηλεκτρικό φορτίο είναι κβαντισμένο μέγεθος με κβάντο το φορτίο του ηλεκτρονίου. Οποιαδήποτε ποσότητα φορτίου είναι πάντα ακέραιο πολλαπλάσιο του φορτίου του ηλεκτρονίου.

Η υπόθεση του Planck ήταν το θεμέλιο μιας νέας θεωρίας, της **κβαντικής θεωρίας**. Η κβαντική θεωρία προβλέπει κβάντωση κι άλλων μεγεθών όπως η ορμή και η στροφορμή.

Η κβαντική θεωρία ερμηνεύει φαινόμενα σε ατομικό επίπεδο τα οποία αδυνατεί να ερμηνεύσει η κλασική θεωρία. Όταν εξετάζουμε φαινόμενα του μακρόκοσμου η κβάντωση των μεγεθών γίνεται δυσδιάκριτη και τα συμπεράσματα της κβαντικής θεωρίας ταυτίζονται με αυτά της κλασικής.

## 7-2 Η ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ ΤΟΥ ΜΕΛΑΝΟΣ ΣΩΜΑΤΟΣ

Ένα οποιοδήποτε σώμα δε φαίνεται στο σκοτάδι ενώ αν το φωτίσουμε το βλέπουμε. Αυτό συμβαίνει γιατί όλο ή ένα μέρος από το φως που πέφτει στο σώμα επανεκπέμπεται (διαχέεται) στο περιβάλλον με αποτέλεσμα κάποιες από τις επανεκπεμπόμενες φωτεινές ακτίνες να φτάνουν στα μάτια μας. Με βάση αυτή τη διαδικασία καθορίζεται και το χρώμα που αποδίδουμε στο σώμα. Πιο συγκεκριμένα, αν φωτίσουμε ένα σώμα με λευκό φως εν γένει απορροφά κάποια μήκη κύματος ενώ άλλα τα επανεκπέμπει. Από τα επανεκπεμπόμενα μήκη κύματος καθορίζεται το χρώμα του σώματος που βλέπουμε. Στην ειδική περίπτωση που επανεκπέμπονται όλα τα μήκη κύματος του λευκού φωτός το σώμα φαίνεται λευκό. Στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή όταν το σώμα απορροφά όλα τα μήκη κύματος, φαίνεται μαύρο.

**Μέλαν σώμα στη φυσική θεωρείται το σώμα που απορροφά την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που προσπίπτει σ' αυτό, σε όλο το φάσμα της (όλες τις συχνότητες).**

Στην πράξη, μέλαν σώμα μπορεί να θεωρηθεί ένα οποιοδήποτε αντικείμενο με αιθαλωμένη την επιφάνειά του.

## Ακτινοβολία μέλανος σώματος

Κάθε σώμα σε οποιαδήποτε θερμοκρασία κι αν βρίσκεται εκπέμπει ενέργεια με μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Η ακτινοβολία αυτή ονομάζεται θερμική ακτινοβολία.

Το μέγεθος που εκφράζει την ενέργεια που εκπέμπεται από τη μονάδα της επιφανεάς ενός σώματος στη μονάδα του χρόνου ονομάζεται **ένταση της ακτινοβολίας**, συμβολίζεται με το  $I$  και στο S.I. μετριέται σε  $J / m^2 s$  ή  $W / m^2$ .

Η ένταση της ακτινοβολίας που εκπέμπει ένα σώμα εξαρτάται από τη θερμοκρασία του.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον, λόγω του ρόλου που έπαιξε στην εξέλιξη της φυσικής, έχει η μελέτη της θερμικής ακτινοβολίας του μέλανος σώματος.

Το μέλαν σώμα, σ' οποιαδήποτε θερμοκρασία κι αν βρίσκεται εκπέμπει ενέργεια με τη μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας σ' όλο το φάσμα της. Το μεγαλύτερο όμως τμήμα της ενέργειας που εκπέμπεται μ' αυτό τον τρόπο περιορίζεται σε μια στενή περιοχή, με "αιχμή" κάποιο μήκος κύματος ( $\lambda_{\max}$ ), διαφορετικό για κάθε θερμοκρασία. Σε θερμοκρασίες γύρω στους 1000 K το μέλαν σώμα εκπέμπει κυρίως στην υπέρυθη περιοχή, ενώ σε ψηλότερες θερμοκρασίες το  $\lambda_{\max}$  μετατοπίζεται σε μικρότερα μήκη κύματος (μεγαλύτερες συχνότητες), στην περιοχή του ορατού (σχ. 7.1)

Η σχέση που συνδέει την απόλυτη θερμοκρασία ( $T$ ) του μέλανος σώματος με το μήκος κύματος αιχμής ( $\lambda_{\max}$ ) είναι

$$\lambda_{\max} T = \text{σταθερό} \quad (\text{νόμος μετατόπισης Wien})$$

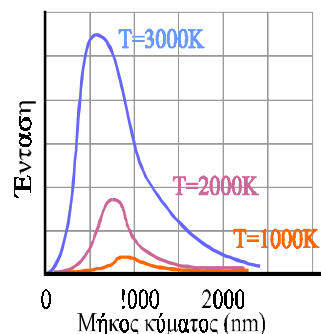
Για την ερμηνεία των πειραματικών δεδομένων οι ερευνητές δέχτηκαν ότι τα άτομα των σωμάτων ταλαντώνονται. Το πλάτος της ταλάντωσής τους είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας στην οποία βρίσκονται τα σώματα. Αποτέλεσμα αυτής της ταλάντωσης των ατόμων, που μπορούμε να τα δούμε ως στοιχειώδη ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα, είναι η εκπομπή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Η υπόθεση όμως αυτή δεν μπόρεσε να ερμηνεύσει ικανοποιητικά τα πειραματικά αποτελέσματα.

Το φαινόμενο ερμηνεύτηκε πλήρως το 1900, με τις δύο υποθέσεις που διατύπωσε ο Planck.

1. **Η ενέργεια των ταλαντούμενων ατόμων δε μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Μπορεί να πάρει μόνο διακριτές (κβαντισμένες) τιμές. Οι τιμές της ενέργειας που μπορεί να έχει το ταλαντούμενο άτομο είναι**

$$E_n = nhf$$

όπου  $n$  ένας θετικός ακέραιος αριθμός που ονομάζεται **κβαντικός αριθμός**,  $f$  η συχνότητα ταλάντωσης του ατόμου και  $h$  μια σταθερά

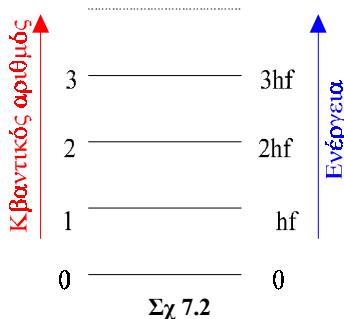


**Σχ 7.1** Ένταση της ακτινοβολίας είναι το ποσό ενέργειας που εκπέμπεται στη μονάδα του χρόνου ανά μονάδα επιφανεάς ή αλλιώς η ισχύς που εκπέμπεται ανά μονάδα επιφανεάς ( $W/m^2$ ). Όσο αυξάνεται η θερμοκρασία η μέγιστη ένταση εκπέμπεται σε όλο και μικρότερα μήκη κύματος.

που αργότερα έπαιξε μεγάλο ρόλο στη φυσική και ονομάστηκε **σταθερά δράσης του Planck**. Η τιμή της βρέθηκε

$$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

2. Το ποσό της ενέργειας, που μπορεί να απορροφήσει ή να εκπέμψει ένα άτομο, υπό μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, μπορεί να πάρει μόνο διακριτές τιμές.



Σχ 7.2

Στο σχήμα 7.2 δίνουμε μία εικόνα των ενεργειακών σταθμών στις οποίες μπορεί να βρεθεί το άτομο. Αν το άτομο απορροφήσει ένα κβάντο ενέργειας δηλαδή ενέργεια  $E = hf$ , αυξάνει την ενέργειά του κατά ένα σκαλοπάτι στην κλίμακα των ενεργειακών σταθμών. Αν πάλι το άτομο εκπέμψει ένα κβάντο ενέργειας υπό μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας τότε κατεβαίνει ένα σκαλοπάτι στην ίδια κλίμακα. Όσο ένα άτομο παραμένει στην ίδια ενεργειακή κατάσταση (στάθμη), ούτε εκπέμπει ούτε απορροφά ενέργεια. Τα άτομα, λοιπόν, απορροφούν ή εκπέμπουν ενέργεια όχι συνεχώς αλλά κάνοντας ενεργειακά άλματα.

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.1

Ένα σώμα μάζας  $m = 50 \text{ g}$  είναι δεμένο σε ελατήριο σταθεράς  $K = 5 \text{ N/m}$  και εκτελεί απλή γραμμική ταλάντωση πλάτους  $A = 5 \text{ cm}$ . Αν θεωρηθεί ότι το σύστημα αποτελεί κβαντικό ταλαντωτή (ταλαντωτή που η ενέργειά του μπορεί να πάρει μόνο διακριτές τιμές) να υπολογιστούν : α) το ενεργειακό διάστημα μεταξύ δύο ενεργειακών σταθμών, δηλαδή το κβάντο ενέργειας αυτού του ταλαντωτή και β) ο κβαντικός αριθμός  $n$  της ενεργειακής στάθμης στην οποία βρίσκεται ο ταλαντωτής.

**Απάντηση :**

α) Η συχνότητα της ταλάντωσης θα είναι  $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{5 \text{ N/m}}{0,05 \text{ kg}}} = \frac{5}{\pi} \text{ s}^{-1}$

Εάν ο ταλαντωτής χάνει ενέργεια λόγω τριβών, σύμφωνα με την υπόθεση του Planck θα πρέπει να χάνει την ενέργειά του κατά άλματα που το μέγεθός τους θα είναι

$$\Delta E = hf = (6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}) \cdot \left( \frac{5}{\pi} \text{ s}^{-1} \right) = 10,551 \times 10^{-34} \text{ J}$$

Πρόκειται για ένα ποσό ενέργειας που πολύ δύσκολα να ανιχνεύεται.

β) Η ολική ενέργεια του ταλαντωτή είναι  $E = \frac{1}{2} KA^2 = \frac{1}{2} (5 \text{ N/m}) \cdot (0,05 \text{ m})^2 = 6,25 \times 10^{-3} \text{ J}$

Όμως επίσης  $E = nhf$ . Άρα  $n = \frac{E}{hf} = \frac{6,25 \times 10^{-3} \text{ J}}{10,551 \times 10^{-34} \text{ J}} = 6 \times 10^{30}$

Πρόκειται για ένα τεράστιο αριθμό.

Σε ανάλογα αποτελέσματα καταλήγουμε αν επιχειρήσουμε να ανιχνεύσουμε την κβάντωση της ενέργειας σε οποιοδήποτε σύστημα στο μακρόκοσμο.

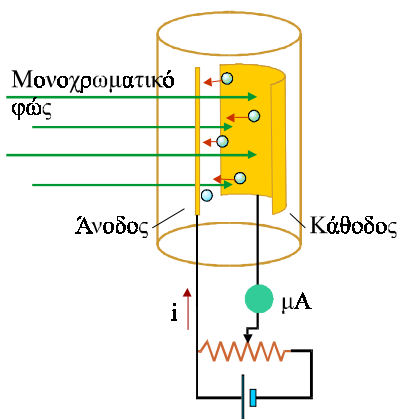
### 7-3 ΤΟ ΦΩΤΟΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ

Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είναι το φαινόμενο κατά το οποίο μια μεταλλική επιφάνεια απελευθερώνει ηλεκτρόνια στο περιβάλλον όταν πάνω της προσπίπτει φως.

Τα ηλεκτρόνια που υπάρχουν στο εσωτερικό ενός αγωγού περιορίζονται στο χώρο που καταλαμβάνει ο αγωγός, από δυνάμεις που εμποδίζουν τη διάχυσή τους στο περιβάλλον. Όταν μια δέσμη φωτός προσπίπτει πάνω στην επιφάνεια του αγωγού κάποια ηλεκτρόνια απορροφούν ενέργεια αρκετή για να υπερνικήσουν αυτές τις δυνάμεις και βγαίνουν από το μέταλλο (**φωτοηλεκτρόνια**).

Για τη μελέτη του φωτοηλεκτρικού φαινομένου θα χρησιμοποιήσουμε τη διάταξη του σχήματος 7.3.

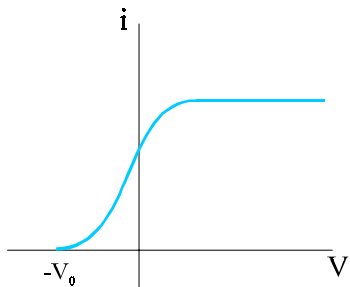
Μέσα σε ένα σωλήνα υψηλού κενού ( $\approx 10^{-7} \text{ atm}$ ) τοποθετούμε δύο ηλεκτρόδια. Το πρώτο, που χρησιμεύει ως **κάθοδος**, έχει μεγάλη επιφάνεια, φέρει επίστρωση από ένα αλκαλιμέταλλο (K ή Cs) και όταν φωτίζεται εκπέμπει ηλεκτρόνια. Τα ηλεκτρόνια αυτά συλλέγονται από το δεύτερο ηλεκτρόδιο την **άνοδο**. Με τη βοήθεια μιας ποτενσιομετρικής διάταξης μπορούμε να μεταβάλλουμε την τάση που εφαρμόζεται στα ηλεκτρόδια. Τέλος, με ένα μικροαμπερόμετρο που παρεμβάλλεται στο κύκλωμα μπορούμε να μετρήσουμε την ένταση του ρεύματος που οφείλεται στα ηλεκτρόνια που εκπέμπει η φωτιζόμενη κάθοδος. Όταν η κάθοδος φωτίζεται εκπέμπει ηλεκτρόνια (φωτοηλεκτρόνια) τα οποία επιταχύνονται από το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των ηλεκτροδίων (σχ. 7.3) και καταλήγουν στην άνοδο.



Σχ. 7.3 Σχηματική παράσταση ενός κυκλώματος φωτοκύτταρου.

Πειραματικά διαπιστώνεται ότι

1. Εκπομπή φωτοηλεκτρονίων έχουμε μόνο όταν η συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερη ή ίση μιας ορισμένης συχνότητας, η οποία είναι χαρακτηριστική για το μέταλλο. Αυτή η οριακή συχνότητα ονομάζεται **συχνότητα κατωφλίου** ( $f_0$ ).
2. Ο αριθμός των ηλεκτρονίων που αποσπώνται από το μέταλλο ανά μονάδα χρόνου είναι ανάλογος της έντασης της φωτεινής ακτινοβολίας που προσπίπτει στο μέταλλο.
3. Η ταχύτητα με την οποία εξέρχονται τα ηλεκτρόνια δεν εξαρτάται από την ένταση της φωτεινής ακτινοβολίας αλλά μόνο από τη συχνότητά της και αυξάνεται όταν η συχνότητα της ακτινοβολίας μεγαλώνει.



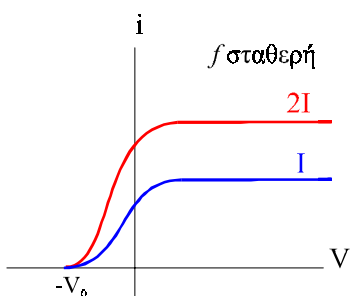
**Σχ 7.4** Διάγραμμα της έντασης του ρεύματος σε συνάρτηση με την τάση στο φωτοκύτταρο

Το διάγραμμα 7.4 παριστάνει την ένταση του ρεύματος σε συνάρτηση με την τάση μεταξύ ανόδου καθόδου στο κύκλωμα του σχήματος 7.3. Παρατηρήστε ότι για τάση μηδέν έχουμε ρεύμα, που σημαίνει ότι τα φωτοηλεκτρόνια εξέρχονται από την κάθοδο με κινητική ενέργεια που τους επιτρέπει να κινηθούν μέχρι την άνοδο. Ρεύμα έχουμε και για τάσεις λίγο μικρότερες από το μηδέν. Τάση αρνητική, εδώ, σημαίνει ότι η άνοδος έχει μικρότερο δυναμικό από την κάθοδο. Στην περίπτωση αυτή το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ ανόδου – καθόδου παρεμποδίζει τα ηλεκτρόνια που εξέρχονται από την κάθοδο να φτάσουν στην άνοδο. Εφόσον για κάποιες αρνητικές τιμές της τάσης έχουμε ρεύμα, η κινητική ενέργεια ορισμένων ηλεκτρονίων, όταν εξέρχονται από την κάθοδο, είναι αρκετά μεγάλη ώστε να υπερνικήσουν το αντιτιθέμενο ηλεκτρικό πεδίο και να φτάσουν στην άνοδο. Η τάση ( $V_0$ ) στην οποία διακόπτεται το ρεύμα ονομάζεται **τάση αποκοπής**.

Το φαινόμενο δε μπορεί να εξηγηθεί μόνο από το γεγονός ότι το φως είναι ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

Για να υπερνικήσει τις δυνάμεις που το συγκρατούν στο μέταλλο ένα ηλεκτρόνιο πρέπει να προσλάβει ένα ελάχιστο ποσό ενέργειας. Η ενέργεια αυτή ονομάζεται **έργο εξαγωγής** και συμβολίζεται με  $\phi$ . Το έργο εξαγωγής ποικίλει από μέταλλο σε μέταλλο.

Το φως, ως ηλεκτρομαγνητικό κύμα, μεταφέρει ενέργεια, επομένως, είναι αναμενόμενο ότι τα ηλεκτρόνια κάποιου μετάλλου μπορούν να απορροφήσουν ενέργεια από το φως και να εξέλθουν από το μέταλλο. Η κλασική θεωρία όμως δε μπόρεσε να ερμηνεύσει το γεγονός, ότι η εξαγωγή ηλεκτρονίων από το μέταλλο και η κινητική ενέργεια με την οποία εξέρχονται εξαρτάται από τη συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας και όχι από την ενέργεια που μεταφέρει η φωτεινή δέσμη που προσπίπτει στο μέταλλο, δηλαδή από την ένταση της ακτινοβολίας.



**Σχ 7.5** Διάγραμμα της έντασης του ρεύματος σε συνάρτηση με την τάση για διαφορετικές τιμές της έντασης της ακτινοβολίας

Το φαινόμενο ερμηνεύτηκε το 1905 από τον Einstein ο οποίος, επεκτείνοντας τις απόψεις του Planck, υπέθεσε ότι

**“το φως αποτελείται από μικρά πακέτα ενέργειας, που ονομάζονται κβάντα φωτός ή φωτόνια”**

Η ενέργεια κάθε φωτονίου είναι

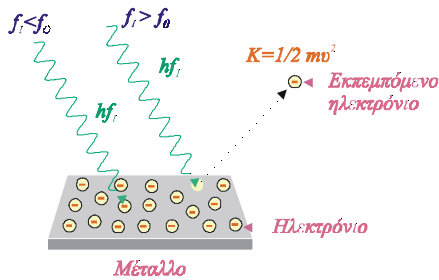
$$E = hf, \quad (7.1)$$

όπου  $f$  η συχνότητά του και  $h$  η σταθερά του Planck.

Κατά τον Einstein, κάθε φωτόνιο της δέσμης που φωτίζει την κάθοδο μεταδίδει όλη του την ενέργεια  $hf$  σε ένα μόνο από τα ηλεκτρόνια του μετάλλου. Αν η ενέργεια  $hf$  του φωτονίου είναι μικρότερη από το έργο εξαγωγής, το ηλεκτρόνιο δε μπορεί να εγκαταλείψει το μέταλλο. Εάν είναι μεγαλύτερη ή ίση με το έργο εξαγωγής  $\phi$  το ηλεκτρόνιο εγκαταλείπει το μέταλλο με κινητική ενέργεια που υπολογίζεται από τη σχέση.

$$K = hf - \phi \quad \text{Φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein (7.2)}$$

Κινητική ενέργεια ηλεκτρονίου	=	Ενέργεια προσπίπτοντος φωτονίου	-	Έργο εξαγωγής
$\frac{1}{2} m v^2$	=	$h f$	-	$\Phi$



Σχ 7.6 Σχηματική παράσταση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου.

Η φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein ερμηνεύει όλα τα πειραματικά δεδομένα.

Για να εξέλθει ένα ηλεκτρόνιο από το μέταλλο πρέπει

$$h f - \phi \geq 0$$

δηλαδή η ενέργεια του προσπίπτοντος φωτονίου να είναι μεγαλύτερη ή οριακά ίση με το έργο εξαγωγής  $h f \geq \phi$

ή 
$$f \geq \frac{\phi}{h}$$

Η συχνότητα  $f_0 = \frac{\phi}{h}$  είναι η **συχνότητα κατωφλίου**.

Αν η συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερη από τη συχνότητα κατωφλίου η αύξηση της έντασης της προσπίπτουσας ακτινοβολίας συνεπάγεται αύξηση του αριθμού των φωτονίων που πέφτουν στην κάθοδο ανά μονάδα χρόνου και επομένως αύξηση του αριθμού των φωτοηλεκτρονίων που εξέρχονται από το μέταλλο στον ίδιο χρόνο. Τέλος όπως φαίνεται από τη φωτοηλεκτρική εξίσωση, η κινητική ενέργεια με την οποία εξέρχονται τα ηλεκτρόνια από κάποιο μέταλλο εξαρτάται μόνο από τη συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας.

### Η ορμή των φωτονίων

Στην παράγραφο 6-11 είδαμε ότι ένα σωματίο με μηδενική μάζα ηρεμίας - τέτοιο είναι το φωτόνιο - έχει ενέργεια  $E = p c$ . Όμως είδαμε επίσης ότι η ενέργεια ενός φωτονίου είναι  $E = h f$ . Εύκολα βρίσκει κανείς ότι

$$p = \frac{h f}{c}$$

Αν λάβουμε υπόψη ότι  $c = \lambda f$  καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ορμή του φωτονίου δίνεται από τη σχέση

$$p = \frac{h}{\lambda} \tag{7.3}$$

Το φως στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο συμπεριφέρεται σαν ένα ρεύμα σωματιδίων (φωτονίων). Σε άλλες περιπτώσεις όμως το φως συμπεριφέρεται σαν κύμα (π.χ. δίνει φαινόμενα συμβολής). Η σχέση (7.3) είναι ιδιαίτερα σημαντική γιατί φωτίζει τη δυαδική φύση του φωτός. Συνδέει μία καθαρά σωματιδιακή ιδιότητα, όπως η ορμή, με μια καθαρά κυματική ιδιότητα, όπως το μήκος κύματος. Ο σύνδεσμος μεταξύ τους είναι η σταθερά του Planck.



## 7-4 ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ COMPTON

### Οι ακτίνες X



**Εικ. 7.2** Wilhelm Röntgen (1845-1923). Ολλανδία, Ελβετία, Γερμανία. Η ανακάλυψη των ομώνυμων ακτίνων έφερε επανάσταση στην ιατρική. Νόμπελ Φυσικής το 1902.

Το 1895 ο Wilhelm Röntgen (Ρέντγκεν) ανακάλυψε ότι όταν ένα μέταλλο «βομβαρδιστεί» με ηλεκτρόνια που κινούνται με μεγάλη ταχύτητα εκπέμπει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Η ακτινοβολία αυτή ονομάστηκε **ακτίνες X** ή ακτίνες Röntgen. Ακτίνες X χρησιμοποιούνται καθημερινά σήμερα για την λήψη κοινών ακτινογραφιών. Οι ακτίνες X έχουν μήκη κύματος από  $0,001\text{ nm}$ , έως  $1\text{ nm}$ .

Ο μηχανισμός παραγωγής των ακτίνων X είναι ακριβώς ο αντίστροφος του φωτοηλεκτρικού φαινομένου. Στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο μια μεταλλική επιφάνεια «βομβαρδίζεται» με ηλεκτρομαγνητικό κύμα και εκπέμπει ηλεκτρόνια. Στις ακτίνες X η μεταλλική επιφάνεια «βομβαρδίζεται» με ηλεκτρόνια και εκπέμπει ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

Όταν τα ηλεκτρόνια της δέσμης φτάνουν στην επιφάνεια του μετάλλου επιβραδύνονται απότομα. Η επιβράδυνση αυτή συνοδεύεται από εκπομπή ακτινοβολίας, το φωτόνιο της οποίας θα έχει ενέργεια μικρότερη ή ίση με την ενέργεια του ηλεκτρονίου στο οποίο οφείλεται η εκπομπή του.

Υπάρχει και άλλη αιτία για την οποία εκπέμπεται ακτινοβολία από τη μεταλλική επιφάνεια. Καθώς τα ηλεκτρόνια συγκρούονται με τα άτομα της επιφάνειας του μετάλλου τούς μεταφέρουν ενέργεια. Τα άτομα διεγείρονται, τα ηλεκτρόνιά τους δηλαδή μεταφέρονται σε στιβάδες μεγαλύτερης ενέργειας. Όταν αποδιεγείρονται, όταν δηλαδή τα ηλεκτρόνια επανέλθουν στην αρχική τους στιβάδα, εκπέμπουν στο περιβάλλον ενέργεια υπό μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας.

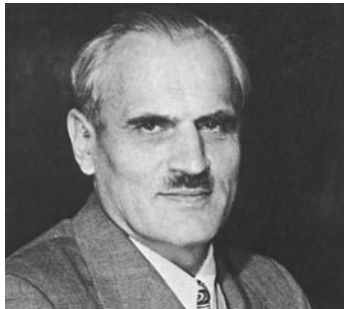
### Η σκέδαση Compton (Κόμπτον)

Η ύπαρξη φωτονίων επιβεβαιώθηκε πειραματικά το 1924 από τον Αμερικανό Arthur Holly Compton. Ο Compton παρατήρησε ότι όταν ακτίνες X προσπίπτουν πάνω σε μια υλική επιφάνεια ένα μέρος τους εκτρέπεται από τα σωματίδια της ύλης (σκεδαάζεται). Ο Compton διαπίστωσε ότι το σκεδαζόμενο τμήμα της ακτινοβολίας έχει μήκος κύματος μεγαλύτερο από το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας (μικρότερη συχνότητα). Οι μετρήσεις του Compton έδειξαν ότι η μεταβολή του μήκους κύματος ανάμεσα στην προσπίπτουσα και τη σκεδαζόμενη δέσμη εξαρτάται μόνο από τη γωνία ανάμεσα στις δύο δέσμες και μάλιστα υπακούει στη σχέση

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)$$

όπου  $\lambda'$  το μήκος κύματος της σκεδαζόμενης δέσμης,  $\lambda$  το μήκος κύματος της προσπίπτουσας δέσμης,  $m$  η μάζα του ηλεκτρονίου και  $\varphi$  η γωνία μεταξύ προσπίπτουσας και ανακλώμενης δέσμης.

Σύμφωνα με την κλασική θεωρία ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα συχνότητας  $f$  που προσπίπτει σ' ένα υλικό αναγκάζει τα ηλεκτρόνια του υλικού να ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα και, επακόλουθα, να παράγουν με τη σειρά τους σαν μικρές κεραίες, ηλεκτρομαγνητικό κύμα της ίδιας συχνότητας  $f$ . Η κλασική θεωρία, λοιπόν, θα περίμενε η σκεδαζόμενη δέσμη να έχει την ίδια συχνότητα και, αντίστοιχα, ίδιο μήκος κύματος με την προσπίπτουσα δέσμη.

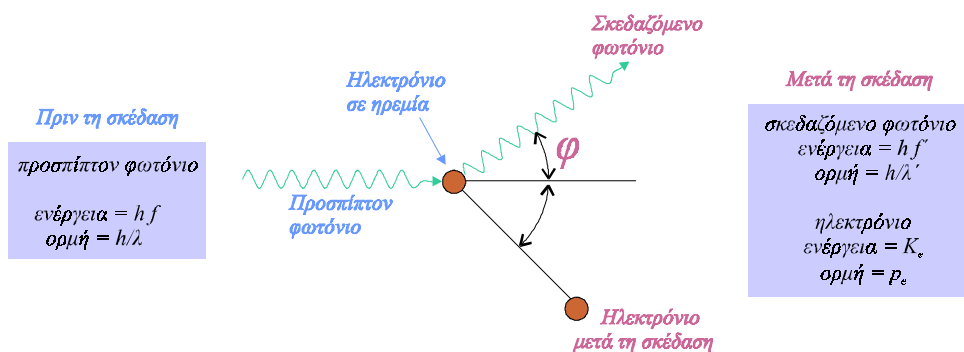


**Εικ. 7.3** Arthur Holly Compton (1892-1962) Αμερική.



Τα πράγματα φωτίζονται αν δούμε την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία ως ρεύμα φωτονίων, δηλαδή σωματίων με μηδενική μάζα ηρεμίας που μεταφέρουν ενέργεια και ορμή. Τότε το πρόβλημα της σκέδασης της ακτινοβολίας μετατρέπεται σε πρόβλημα κρούσης ανάμεσα σ' ένα φωτόνιο και ένα ηλεκτρόνιο.

Ας υποθέσουμε ότι ένα φωτόνιο μήκους κύματος  $\lambda$  συγκρούεται μ' ένα πρακτικώς ακίνητο ηλεκτρόνιο (σχ. 7.7). Μετά τη σκέδαση το φωτόνιο κινείται σχηματίζοντας γωνία  $\varphi$  με την αρχική διεύθυνση κίνησης και έχοντας χάσει τμήμα της αρχικής του ενέργειας αφού ένα μέρος της αρχικής του ενέργειας θα μεταφερθεί στο ηλεκτρόνιο. Το σκεδαζόμενο φωτόνιο θα έχει μετατραπεί σε φωτόνιο μήκους κύματος  $\lambda'$  με  $\lambda' > \lambda$ . Κατά τη διάρκεια της σκέδασης πρέπει να διατηρούνται η ενέργεια και η ορμή του συστήματος.



Σχ. 7.7

Το φωτόνιο έχει πριν τη σκέδαση ενέργεια  $E = hf = hc/\lambda$  και μετά τη σκέδαση  $E' = hc/\lambda'$ . Θα πρέπει λοιπόν να ισχύει

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + K_e$$

όπου  $K_e$  η κινητική ενέργεια του ανακρουόμενου ηλεκτρονίου. Επειδή το ηλεκτρόνιο μετά την κρούση μπορεί να κινείται με ταχύτητα που πλησιάζει την ταχύτητα του φωτός καλό είναι να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση 6.17 για την κινητική του ενέργεια οπότε

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2 \quad (7.4)$$

Η ορμή του φωτονίου πριν είναι  $p = E/c = h/\lambda$  και η ορμή του φωτονίου μετά είναι  $p' = h/\lambda'$ . Η ορμή του ηλεκτρονίου θα είναι σύμφωνα με τη

σχέση (6.15)  $p_e = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$

Η διατήρηση της ορμής σε διανυσματική μορφή δίνει

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}_e$$

οπότε

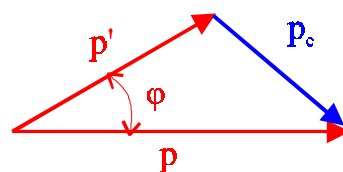
$$\mathbf{p}_e = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$$

Χρησιμοποιώντας τον νόμο του συνημιτόνου στο διανυσματικό διάγραμμα του σχήματος 7.8 προκύπτει

$$p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \varphi$$

Δηλαδή

$$\frac{m^2 v^2}{1-v^2/c^2} = \frac{h^2}{\lambda^2} + \frac{h^2}{\lambda'^2} - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'} \cos \varphi \quad (7.5)$$



Σχ. 7.8

Από τις (7.4) και (7.5), αν απαλείψουμε το  $v$ , προκύπτει η σχέση

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \varphi)$$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.2

Δέσμη ακτίνων X με  $\lambda = 0,1 \text{ nm}$  ( $10^{-10} \text{ m}$ ) σκεδάζεται από επιφάνεια άνθρακα. Η σκεδασθείσα δέσμη σχηματίζει γωνία  $90^\circ$  με την προσπίπτουσα. Να βρεθούν :

- Η ενέργεια και η ορμή των φωτονίων της προσπίπτουσας δέσμης.
- Το μήκος κύματος, η ενέργεια και η ορμή του φωτονίου της σκεδαζόμενης δέσμης.
- Η κινητική ενέργεια που προσδίδεται σε ένα ανακρουόμενο ηλεκτρόνιο.

**Απάντηση :**

$$\alpha) \quad E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}) \cdot (3 \times 10^8 \text{ m/s})}{10^{-10} \text{ m}} = 19,878 \times 10^{-16} \text{ J} = 12424 \text{ eV}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{10^{-10} \text{ m}} = 6,626 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

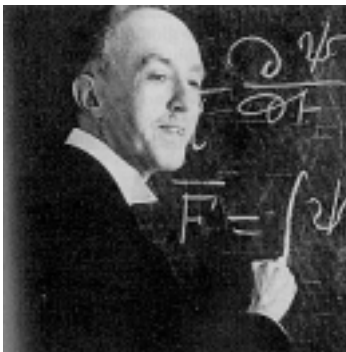
$$\beta) \quad \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \varphi)$$

$$\text{άρα } \lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos \varphi) = 10^{-10} \text{ m} + \frac{6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{(9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}) \cdot (3 \times 10^8 \text{ m/s})} = 1,024 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$E' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{(6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}) \cdot (3 \times 10^8 \text{ m/s})}{1,024 \times 10^{-10} \text{ m}} = 19,412 \times 10^{-16} \text{ J} = 12133 \text{ eV}$$

$$p' = \frac{h}{\lambda'} = \frac{6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{1,024 \times 10^{-10} \text{ m}} = 6,471 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\gamma) \quad K_e = E - E' = 291 \text{ eV}$$



**Εικ. 7.4** Πρίγκιπας Louis de Broglie (1892-1987). Γάλλος αριστοκρατικής καταγωγής. Βραβείο Νόμπελ 1929.

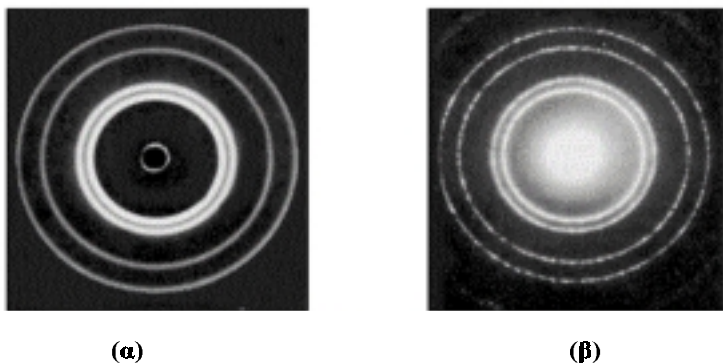
## 7-5 Η ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΦΥΣΗ ΤΗΣ ΥΛΗΣ

Είκοσι περίπου χρόνια μετά την υπόθεση του Einstein ότι ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα, όπως το φως, έχει σωματιδιακή υπόσταση, στα 1924, ο Γάλλος Louis de Broglie (Λουί ντε Μπρολί) πιστεύοντας στη συμμετρία της φύσης έθεσε το αξίωμα ότι οποιοδήποτε σωματίο ορμής  $p$  είναι συνδεδεμένο με ένα κύμα μήκους κύματος  $\lambda$  που δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Η υπόθεση de Broglie δεν άργησε να επαληθευθεί. Το 1927, στην Αμερική, οι Davisson και Germer διαπίστωσαν ότι μία δέσμη ηλεκτρονίων

που κινούνται με μεγάλη ταχύτητα περιθλάται με τρόπο ανάλογο με αυτόν που περιθλάται μια δέσμη ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, μια δέσμη ακτίνων X για παράδειγμα. Σύντομα, νέα πειράματα έδειξαν ότι κυματική συμπεριφορά παρουσιάζουν και δέσμες σωματιδίων  $\alpha$  και δέσμες νετρονίων. Τα αποτελέσματα ήταν τέτοια που δεν άφηναν κανένα περιθώριο να αμφισβητηθεί ότι τα σωματίδια έχουν και κυματική φύση.



**Εικ. 7.5** (α) Εικόνα περίθλασης ακτίνων X . (β) Εικόνα περίθλασης δέσμης ηλεκτρονίων

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.3

Ποιο μήκος κύματος προβλέπει η υπόθεση de Broglie α) για μία μπάλα του μπάσκετ, μάζας  $1\text{ kg}$  , που κινείται με ταχύτητα  $3\text{ m/s}$  , β) για τη σφαίρα ενός πυροβόλου όπλου μάζας  $20\text{ g}$  που κινείται με ταχύτητα  $300\text{ m/s}$  , γ) για ένα ηλεκτρόνιο μάζας  $9,11 \times 10^{-31}\text{ kg}$  που έχει ταχύτητα  $7 \times 10^6\text{ m/s}$  .

#### Απάντηση :

Και τα τρία σώματα, ακόμη και το ηλεκτρόνιο, κινούνται με ταχύτητες σημαντικά μικρότερες της ταχύτητας του φωτός, δε χρειάζεται λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε τη σχετικιστική σχέση για την ορμή.

$$\alpha) \quad \lambda_1 = \frac{h}{p_1} = \frac{6,626 \times 10^{-34}\text{ J} \cdot \text{s}}{(1\text{ kg}) \cdot (3\text{ m/s})} = 2,21 \times 10^{-34}\text{ m}$$

$$\beta) \quad \lambda_2 = \frac{h}{p_2} = \frac{6,626 \times 10^{-34}\text{ J} \cdot \text{s}}{(20 \times 10^{-3}\text{ kg}) \cdot (3 \times 10^2\text{ m/s})} = 1,1 \times 10^{-32}\text{ m}$$

$$\gamma) \quad \lambda_3 = \frac{h}{p_3} = \frac{6,626 \times 10^{-34}\text{ J} \cdot \text{s}}{(9,11 \times 10^{-31}\text{ kg}) \cdot (7 \times 10^6\text{ m/s})} = 1,04 \times 10^{-10}\text{ m}$$

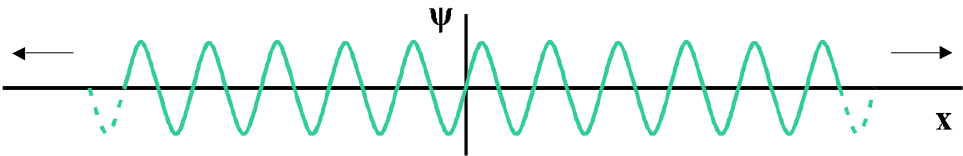
Από τα δύο πρώτα αποτελέσματα βλέπουμε ότι ένα σώμα του μακρόκοσμου συνδέεται με μήκος κύματος τόσο μικρό που μάλλον δεν θα μπορέσουμε να το ανιχνεύσουμε ποτέ. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι η υπόθεση του de Broglie για την κυματική φύση της ύλης έχει ουσιαστικά εφαρμογή μόνο για σωματίδια ατομικής και υποατομικής κλίμακας.

7-6    ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ

Είδαμε ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα συμπεριφέρονται άλλοτε σαν κύματα και άλλοτε σαν δέσμες σωματίων. Επίσης δέσμες κλασικών σωματιδίων, όπως τα ηλεκτρόνια, έχουν και κυματική συμπεριφορά. Μπορούμε να πούμε ότι η ύλη, με την ευρύτερη έννοια (συμπεριλαμβάνοντας και την ενέργεια), έχει διπλή οντότητα -σωματιδιακή και κυματική. Πρόκειται για ένα συμπέρασμα πολύ καλά θεμελιωμένο πειραματικά.

Κάτω από μια τέτοια θεώρηση προκύπτει ένα σημαντικό πρόβλημα. Ένα σωματίδιο, όπως το αντιλαμβάνονται οι κλασικοί φυσικοί, είναι κάτι του οποίου η θέση στο χώρο ήταν αυστηρά προσδιορισμένη. Αντίθετα, ένα κύμα εκτείνεται στο χώρο. Ένα σωματίδιο με κυματική συμπεριφορά πού βρίσκεται; Η απάντηση της κβαντικής θεωρίας, όσο κι αν μας σοκάρει, είναι : **“δεν μπορούμε να γνωρίζουμε πού ακριβώς βρίσκεται.”**

Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που έχει κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή ορμή **p** παράλληλη στον άξονα των **x**. Σύμφωνα με την υπόθεση de Broglie και τη σχέση  $\lambda = \frac{h}{p}$ , εάν γνωρίζουμε επακριβώς την ορμή του σωματιδίου αυτό θα συνδέεται και με ένα κύμα με επακριβώς ορισμένο μήκος κύματος  $\lambda$ . Η εξίσωση που περιγράφει το στιγμιότυπο ενός τέτοιου κύματος στο χώρο τη χρονική στιγμή  $t = 0$  είναι  $\psi = A \eta \mu \left( \frac{2\pi x}{\lambda} \right)$  και η γραφική της παράσταση είναι αυτή του σχήματος 7.9.



Σχ. 7.9    Η αβεβαιότητα της θέσης, Δx , είναι άπειρη

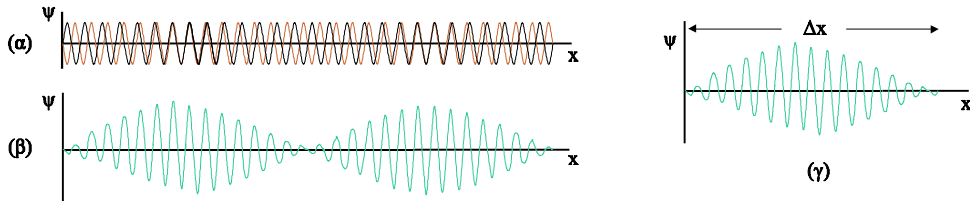


**Εικ. 7.6** Werner Heisenberg (1901-1976) Γερμανία. Σε ηλικία περίπου είκοσι χρονών ολοκλήρωσε τη βασική του εργασία για την κβαντική θεωρία . Βραβείο Νόμπελ για την αρχή της αβεβαιότητας το 1932.

Το στιγμιότυπο εκτείνεται από το  $-\infty$  στο  $+\infty$ . Πού βρίσκεται το σωματίδιο που είναι συνδεδεμένο με αυτό το κύμα; Μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε.

Για να μη καταστρέψουμε εντελώς τη σωματιδιακή εικόνα χρειαζόμαστε κύματα περιορισμένα στο χώρο. Θα ονομάζουμε αυτά τα κύματα **κυματοπακέτα**. Μπορούμε να φτιάξουμε και να περιγράψουμε μαθηματικά οποιαδήποτε κυματομορφή με τη μέθοδο της υπέρθεσης συνδυάζοντας κατάλληλα διάφορα κύματα με επιλεγμένα μήκη κύματος πλάτη και φάσεις. Υπάρχει όμως κάποιος περιορισμός. Όσο πιο εντοπισμένο στο χώρο (πιο σωματιδιακό) θέλουμε να είναι το κυματοπακέτο τόσο περισσότερα και πιο διασκορπισμένα μήκη κύματος πρέπει να χρησιμοποιήσουμε (σχ. 7.10). Πληρώνουμε δηλαδή τον εντοπισμό της θέσης του σωματιδίου-κύματος με απροσδιοριστία στο μήκος κύματος που του αντιστοιχίζουμε και - κατ' επέκταση - στην ορμή του

$$\left( p = \frac{h}{\lambda} \right).$$



**Σχ. 7.10** (α) Οι κόκκινες και οι μαύρες γραμμές δείχνουν κύματα με πολύ μικρή διαφορά στο μήκος κύματός τους. Η υπέρθεσή τους δίνει το κύμα (β) (διακρότημα). Με την υπέρθεση μεγάλου αριθμού κυμάτων μπορούμε να συνθέσουμε ένα κυματοπακέτο, όπως αυτό του σχήματος (γ), με περιορισμένη αβεβαιότητα  $\Delta x$  ως προς τη θέση του στο χώρο.

Η αδυναμία μας να προσδιορίσουμε επακριβώς ταυτόχρονα τη θέση και την ορμή ενός σωματιδίου δεν οφείλεται σε πειραματικές ατέλειες. Είναι σύμφυτη με την ίδια την κβαντική δομή της ύλης.

Ο Heisenberg το 1927 κωδικοποίησε τα παραπάνω διατυπώνοντας την **αρχή της αβεβαιότητας** (ή απροσδιοριστίας) με τη σχέση:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{h}{2\pi}$$

**Δεν είναι δυνατόν να μετρήσουμε ταυτόχρονα και τη θέση και την ορμή ενός σωματιδίου με απεριορίστη ακρίβεια.**

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι τα σύμβολα  $\Delta x$  και  $\Delta p_x$  δε σημαίνουν τη μεταβολή των μεγεθών αλλά το εύρος της αβεβαιότητας με την οποία γνωρίζουμε τα μεγέθη. Ανάλογες σχέσεις ισχύουν και για τις άλλες διευθύνσεις  $\left( \Delta p_y \cdot \Delta y \geq \frac{h}{2\pi}, \Delta p_z \cdot \Delta z \geq \frac{h}{2\pi} \right)$ .

Μία άλλη διατύπωση της αρχής της αβεβαιότητας του Heisenberg είναι η

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$$

**Η αβεβαιότητα στη μέτρηση της ενέργειας μιας κατάστασης ενός συστήματος είναι αντίστροφα ανάλογη με τον χρόνο που το σύστημα παραμένει σ' αυτή την κατάσταση.**

Δηλαδή όλες οι μετρήσεις ενέργειας περιέχουν μια αβεβαιότητα, εκτός αν διαθέτουμε για τη μέτρηση άπειρο χρόνο.

Σε ένα διεγερμένο άτομο ένα ή περισσότερα ηλεκτρόνια δε βρίσκονται στη θεμελιώδη τους κατάσταση, αλλά σε κατάσταση μεγαλύτερης ενέργειας. Όταν ένα τέτοιο ηλεκτρόνιο μεταπηδήσει στη θεμελιώδη του κατάσταση, εκπέμπει ένα φωτόνιο ενέργειας  $hf$ , ίσης με τη διαφορά ενέργειας των δύο καταστάσεων στις οποίες βρέθηκε.

Ένα διεγερμένο άτομο εκπέμπει ακτινοβολία όταν ένα ή περισσότερα ηλεκτρόνια που δεν βρίσκονται στη θεμελιώδη κατάσταση επιστρέψουν σ' αυτή. Σε κάθε τέτοιο "κβαντικό άλμα" εκπέμπεται ένα φωτόνιο. Η μελέτη των φασμάτων εκπομπής δείχνει ότι οι φασματικές γραμμές δεν είναι αυστηρά

καθορισμένες αλλά η κάθε μια εμφανίζει ένα φυσικό εύρος. Το εύρος των φασματικών γραμμών μπορεί να εξηγηθεί με την αρχή της αβεβαιότητας.

Ένα διεγερμένο άτομο μπορεί να εκπέμψει ένα φωτόνιο οποιαδήποτε στιγμή στο χρονικό διάστημα από μηδέν μέχρι άπειρο. Ο μέσος χρόνος στον οποίο ένας μεγάλος αριθμός διεγερμένων ατόμων εκπέμπει ακτινοβολία είναι της τάξης του  $10^{-8}$  s.

Από τη σχέση  $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$  και επειδή  $\Delta E = h \Delta f$  προκύπτει

$$h \Delta f \geq \frac{h}{2\pi \Delta t} \quad \text{και} \quad \Delta f \geq \frac{1}{2\pi \Delta t}$$

θέτοντας όπου  $\Delta t = 10^{-8}$  s έχουμε

$$\Delta f \geq 1,6 \times 10^7 \text{ Hz}$$

όπου  $1,6 \times 10^7 \text{ Hz}$  είναι το ελάχιστο εύρος της φασματικής γραμμής.

#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.4

Ένα ηλεκτρόνιο κινείται με ταχύτητα  $3 \times 10^5 \text{ m/s}$  μετρημένη με ακρίβεια 0,1%. Με ποια ακρίβεια μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση του; Εάν στη θέση του ηλεκτρονίου έχουμε μια μπάλα του γκολφ που έχει μάζα 45 g και κινείται με ταχύτητα  $20 \text{ m/s}$ , μετρημένη με την ίδια ακρίβεια, με ποια ακρίβεια μπορούμε να υπολογίσουμε τη θέση της;

**Απάντηση :**

α)  $p_x = m_e v_x = (9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}) \cdot (3 \times 10^5 \text{ m/s}) = 27,33 \times 10^{-26} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$

Η αβεβαιότητα  $\Delta p_x$  θα είναι το 0,1% της παραπάνω τιμής δηλαδή  $27,33 \times 10^{-29} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ .

Η αβεβαιότητα  $\Delta x$  στη θέση θα είναι το λιγότερο

$$\Delta x = \frac{h}{2\pi \cdot \Delta p_x} = \frac{6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{6,28 \cdot 27,33 \times 10^{-29} \text{ kg} \cdot \text{m/s}} = 0,38 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

Για τις διαστάσεις του ηλεκτρονίου η αβεβαιότητα θέσης είναι τεράστια. Πρόκειται για ένα ηλεκτρόνιο που δεν θα το βρούμε ποτέ. Είναι σα να ψάχνεις ψύλλους στ' άχυρα.

β) Με την ίδια διαδικασία, για το μπαλάκι του γκολφ βρίσκουμε αβεβαιότητα ως προς τη θέση  $\Delta x \cong 1,16 \times 10^{-27} \text{ m}$ .

Για ένα σώμα των διαστάσεων της μπάλας του γκολφ η αβεβαιότητα αυτή είναι μηδαμινή. Πρακτικά γνωρίζουμε με ακρίβεια τη θέση του.

## 7-7 ΚΥΜΑΤΟΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΗ SCHRÖDINGER (ΣΠΕΝΤΙΝΓΚΕΡ)

Είδαμε ότι ένα υποατομικό σωματίδιο, για παράδειγμα ένα ηλεκτρόνιο, δε μπορεί να περιγραφεί σαν υλικό σημείο, με τρεις συντεταγμένες στο χώρο. Υπό ορισμένες συνθήκες συμπεριφέρεται σαν κύμα. Για την περιγραφή του χρειαζόμαστε μία **κυματοσυνάρτηση** σε αναλογία με την εξίσωση κύματος που χρησιμοποιούμε για την περιγραφή ενός μηχανικού ή ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Την κυματοσυνάρτηση αυτή θα τη συμβολίζουμε με  $\Psi$ .



Η κυματοσυνάρτηση είναι μία συνάρτηση της θέσης και του χρόνου  $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ .

Στα μηχανικά κύματα η εξίσωση κύματος μάς δίνει για κάθε χρονική στιγμή τη θέση κάθε σημείου του υλικού μέσου στο οποίο διαδίδεται το κύμα. Στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα οι εξισώσεις κύματος που τα περιγράφουν μας δίνουν για κάθε χρονική στιγμή την τιμή της έντασης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου σε κάθε σημείο του χώρου στον οποίο διαδίδεται το κύμα. Η κυματοσυνάρτηση  $\Psi$  όμως που περιγράφει ένα σωματίδιο-κύμα δεν σχετίζεται με κάποιο μέσον διάδοσης ούτε με κάποιες ιδιότητες του χώρου. Είναι δύσκολο να της αποδώσουμε κάποια φυσική σημασία. Μπορούμε μόνο να περιγράψουμε πώς σχετίζεται με τα φυσικά παρατηρούμενα φαινόμενα.

Για κάποιο συγκεκριμένο σημείο, ορισμένη χρονική στιγμή η κυματοσυνάρτηση θα έχει μια συγκεκριμένη τιμή. Ο Max Born πρότεινε να ερμηνεύσουμε το τετράγωνο του μέτρου της κυματοσυνάρτησης σαν την πιθανότητα θέσης ανά μονάδα όγκου. Δηλαδή, αν ορίσουμε έναν στοιχειώδη όγκο  $dV$  γύρω από ένα συγκεκριμένο σημείο  $(x, y, z)$  **το γινόμενο  $|\Psi|^2 dV$  δίνει την πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίο μέσα στον όγκο  $dV$  στη δεδομένη χρονική στιγμή.**

Αν χωρίσουμε το σύνολο του χώρου σε στοιχειώδεις όγκους  $dV$  και σε κάθε σημείο του χώρου βρούμε την τιμή της  $\Psi$  για κάποια χρονική στιγμή το άθροισμα των γινομένων  $|\Psi|^2 dV$  πρέπει να είναι ίσο με τη μονάδα.

$$\sum |\Psi|^2 dV = 1$$

Δηλαδή η πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίδιο κάπου στο χώρο είναι ίση με τη μονάδα. Με απλά λόγια κάθε χρονική στιγμή το σωματίδιο σίγουρα βρίσκεται κάπου. Η παραπάνω σχέση προκύπτει από την διάσταση που έδωσε ο Born στο  $|\Psi|^2$  και ονομάζεται **συνθήκη κανονικοποίησης**. Εάν η κυματοσυνάρτηση είναι σωστή πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη κανονικοποίησης.

**Πώς βρίσκουμε όμως μία κυματοσυνάρτηση;**

Την απάντηση έδωσε ο Erwin Schrödinger διατυπώνοντας την περίφημη εξίσωσή του της οποίας λύση είναι η  $\Psi$ .

Για ένα σωματίδιο που κινείται πάνω στον άξονα των  $x$  σε μία περιοχή όπου υπάρχει ένα συντηρητικό πεδίο, για κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή η εξίσωση Schrödinger έχει τη μορφή :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + U(x) \cdot \Psi(x) = E \cdot \Psi(x) \tag{7.6}$$

$\hbar$	(διαβάζεται h-bar) η συντομογραφία του $\frac{h}{2\pi}$ ,
$m$	η μάζα ηρεμίας του σωματιδίου,
$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}$	η δεύτερη παράγωγος της κυματοσυνάρτησης ως προς $x$ ,
$U(x)$	η δυναμική ενέργεια του σωματιδίου λόγω της θέσης του
$E$	η ολική ενέργεια του σωματιδίου.

Η λύση της εξίσωσης αυτής είναι η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου.



**Εικ. 7.7** Max Born. (1882-1970). Γερμανία. Μεγάλος θεωρητικός φυσικός. Χρησιμοποίησε τις πιθανότητες για να ερμηνεύσει φαινόμενα της κβαντικής μηχανικής. Το 1933 εγκατέλειψε τη Γερμανία αρχικά για το Εδιμβούργο και στη συνέχεια για τις Ηνωμένες Πολιτείες. Νόμπελ 1954.



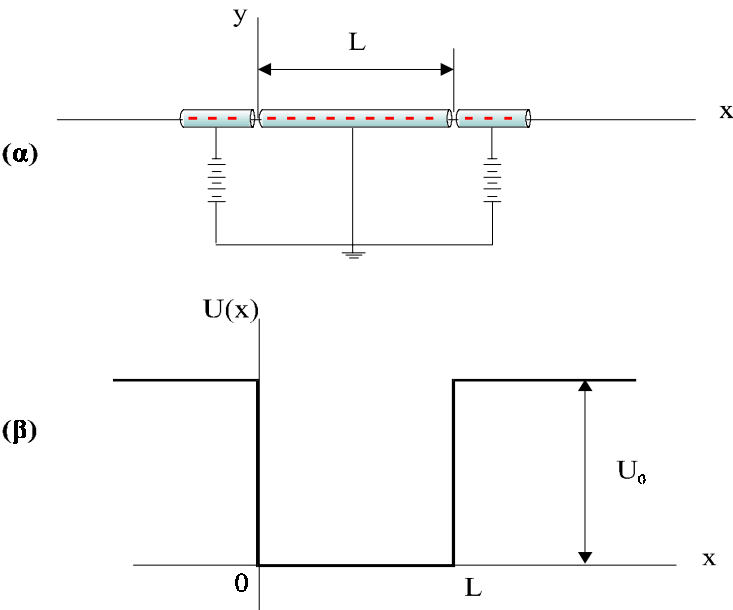
**Εικ. 7.8** Erwin Schrödinger (1877-1961). Γεννήθηκε στη Βιέννη από Αυστριακό πατέρα και Αγγλίδα μητέρα. Καλλιεργημένη και καλλιτεχνική φύση είχε το ταλέντο να παρουσιάζει τις απόψεις του με γοητευτικό τρόπο. Δίδαξε στη Ζυρίχη, όπου διατύπωσε και την περίφημη εξίσωσή του, στο Βερολίνο, στην Οξφόρδη και στο Δουβλίνο. Στο τέλος της ζωής του επέστρεψε στη Βιέννη. Μοιράστηκε με τον P.A.M. Dirac το Νόμπελ Φυσικής το 1933.

Εφόσον το σωματίδιο είναι περιορισμένο να κινείται πάνω στον άξονα των  $x$  η κυματοσυνάρτησή του πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη  $\sum |\Psi|^2 dx = 1$  δηλαδή το σωματίο σίγουρα βρίσκεται κάπου στον άξονα των  $x$ .

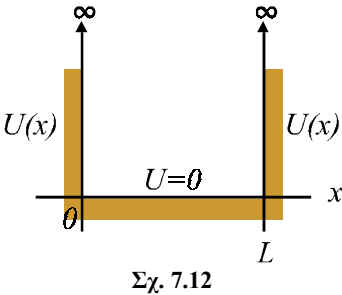
### 7-8 ΣΩΜΑΤΙΔΙΟ ΠΑΓΙΔΕΥΜΕΝΟ ΣΕ ΠΗΓΑΔΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ

Σωματίδιο παγιδευμένο σε πηγάδι δυναμικού είναι ένα σωματίδιο που λόγω εξωτερικών δυνάμεων είναι παγιδευμένο σε μία περιοχή του χώρου. Αν θεωρήσουμε για παράδειγμα σαν σωματίο ένα ηλεκτρόνιο, τέτοιου είδους παγίδες είναι τα άτομα. Η διάταξη του σχήματος 7.11 μας δίνει μια πιο χειροπιαστή εικόνα του τι είναι ένα πηγάδι δυναμικού.

**Σχ. 7.11** (α) Η διάταξη αυτή περιορίζει τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του αγωγού σ' ένα μήκος  $L$  πάνω στον άξονα των  $x$ . (β) Το πηγάδι δυναμικού που δημιουργεί η διάταξή μας. Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια που βρίσκονται στα όρια του  $L$  έχουν δυναμική ενέργεια,  $U=0$  ενώ έξω από τα όρια του  $L$  δυναμική ενέργεια  $U \neq 0$ . Για να βγει ένα ηλεκτρόνιο από το πηγάδι πρέπει να έχει κινητική ενέργεια μεγαλύτερη από το βάθος του πηγαδιού  $U_0$ . Στην πράξη το πηγάδι δυναμικού που δημιουργεί η διάταξή μας έχει στρογγυλεμένα χείλη και τοιχώματα που γέρνουν ελαφρά προς τα έξω.



#### A) ΠΗΓΑΔΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ ΒΑΘΟΥΣ



Έστω ότι έχουμε ένα ηλεκτρόνιο που κινείται μόνο κατά τη διεύθυνση των  $x$  και είναι παγιδευμένο σ' ένα πηγάδι δυναμικού άπειρου βάθους όπως στο σχήμα 7.12. Αυτό σημαίνει ότι εάν το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στο διάστημα  $0 \leq x \leq L$  έχει δυναμική ενέργεια  $U = 0$  ενώ αν  $x < 0$  ή  $x > L$  η δυναμική ενέργεια απειρίζεται. Με τους παραπάνω περιορισμούς η λύση της εξίσωσης (7.6) είναι

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= 0 && \text{αν } x < 0 \text{ ή } x > L && \text{και} \\ \Psi(x) &= A \eta \mu \frac{n \pi x}{L} && \text{για } 0 \leq x \leq L && \text{όπου } n=1,2,3,\dots \end{aligned}$$

Η  $\Psi(x)$  είναι η κυματοσυνάρτηση που περιγράφει το ηλεκτρόνιό μας για κάποια δεδομένη χρονική στιγμή.

Το μήκος κύματος της ημιτονοειδούς αυτής μορφής μπορεί να πάρει τις τιμές

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Αν θέσουμε τις τιμές του  $\lambda$  που βρήκαμε στη σχέση  $p = \frac{h}{\lambda}$  προκύπτει

$$p = \frac{nh}{2L} \quad (7.7)$$

Βλέπουμε ότι η ορμή του ηλεκτρονίου δεν μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή αλλά τιμές που είναι ακέραια πολλαπλάσια της ποσότητας  $\frac{h}{2L}$ . Δηλαδή η ορμή είναι κβαντισμένη.

Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει και με την ενέργεια του ηλεκτρονίου που μπορεί να είναι μόνο κινητική.

$$E = K = \frac{p^2}{2m_e}$$

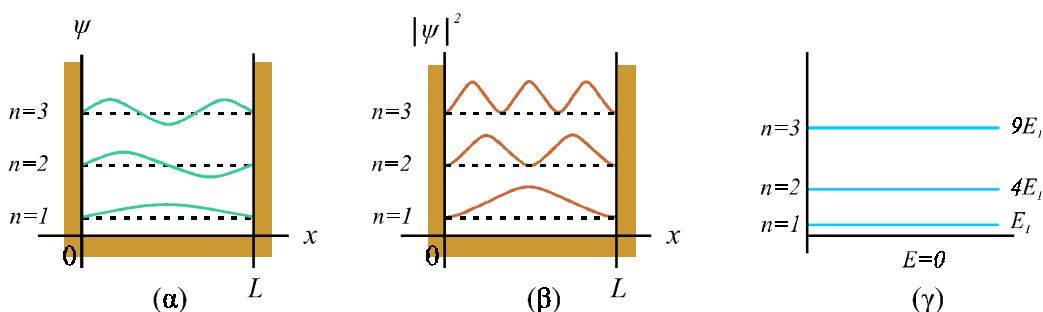
Αντικαθιστώντας στη σχέση αυτή την ορμή από την (7.7) βρίσκουμε

$$E = n^2 \frac{h^2}{8m_e L^2} \quad (7.8)$$

Η ενέργεια του ηλεκτρονίου μας είναι υποχρεωτικά κβαντισμένη.

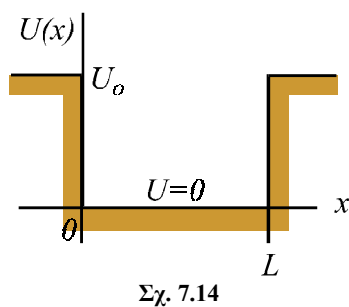
Ας δούμε τώρα αν μπορούμε να εντοπίσουμε τη θέση του ηλεκτρονίου.

Είδαμε ότι, σύμφωνα με την παραδοχή του Born, το τετράγωνο του μέτρου της κυματοσυνάρτησης είναι η πιθανότητα θέσης ανά μονάδα όγκου. Στο πρόβλημα που μελετάμε το ηλεκτρόνιο κινείται μόνο στη διεύθυνση του άξονα των  $x$ . Άρα το  $|\Psi(x)|^2$  θα είναι η πιθανότητα θέσης ανά μονάδα μήκους για τη δεδομένη στιγμή που εξετάζουμε.

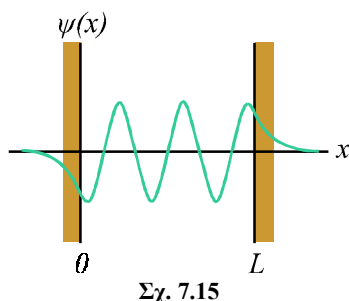


**Σχ. 7.13** (α) Γραφικές παραστάσεις της  $\Psi(x)$  για τους τρεις πρώτους κβαντικούς αριθμούς. (β) Οι αντίστοιχες παραστάσεις για το  $|\Psi(x)|^2$ . Η τιμή του  $|\Psi(x)|^2$  για κάθε σημείο δείχνει την πιθανότητα να βρεθεί το ηλεκτρόνιο σ' ένα στοιχειώδες  $dx$  γύρω από το σημείο αυτό. (γ) Οι αντίστοιχες ενεργειακές στάθμες του ηλεκτρονίου. Η απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικές στάθμες δεν είναι σταθερή, μεγαλώνει όσο αυξάνει το  $n$ .

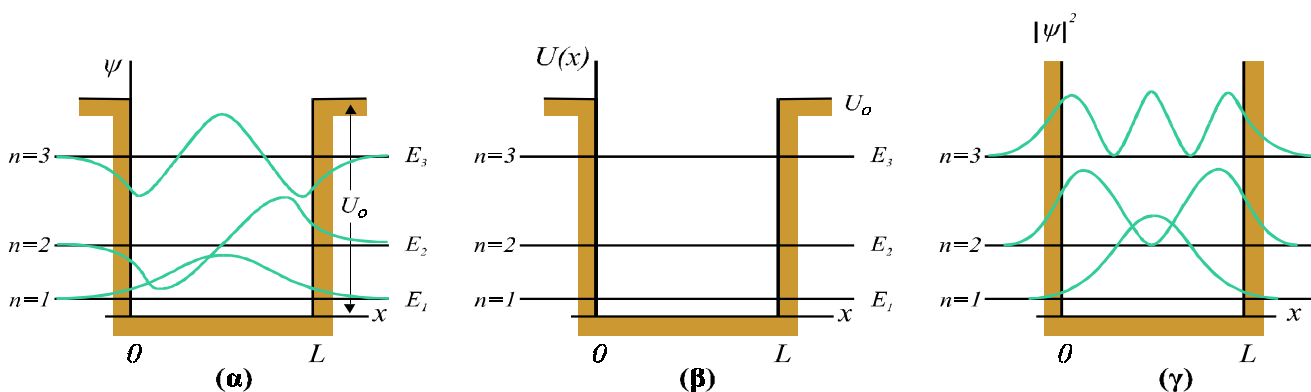
## B. ΠΗΓΑΔΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΒΑΘΟΥΣ



Έστω ότι το ηλεκτρόνιο της προηγούμενης παραγράφου είναι εγκλωβισμένο σ' ένα πηγάδι πεπερασμένου βάθους (σχ. 7.14). Τώρα, αν το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στο διάστημα  $[0-L]$  έχει δυναμική ενέργεια  $U=0$ , αν βρίσκεται έξω από το διάστημα  $[0-L]$  έχει δυναμική ενέργεια  $U_0$ . Το ηλεκτρόνιο που εξετάζουμε έχει ενέργεια μικρότερη από  $U_0$ . Με αυτές τις οριακές συνθήκες, η 7.6, για  $0 \leq x \leq L$ , έχει μια ημιτονοειδή λύση ανάλογη με αυτή που βρήκαμε στο πηγάδι άπειρου βάθους. Για  $x < 0$  και  $x > L$ , όμως, δεν προκύπτει  $\Psi(x) = 0$ , όπως πριν, αλλά μία εκθετικά φθίνουσα συνάρτηση του  $x$ . Τελικά η κυματοσυνάρτηση έχει μία μορφή σαν αυτήν του σχήματος 7.15.



Και στην περίπτωση του πηγαδιού πεπερασμένου βάθους οι καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί το ηλεκτρόνιο είναι διακριτές (κβαντισμένες). Εκεί που μας περιμένει μία κβαντική έκπληξη είναι στη γραφική παράσταση του  $|\Psi(x)|^2$  συναρτήσει του  $x$ . Βλέπουμε ότι το  $|\Psi(x)|^2$  δε μηδενίζεται αμέσως για  $x < 0$  και  $x > L$ . Δηλαδή ακόμη κι αν το ηλεκτρόνιο δεν έχει την απαιτούμενη κινητική ενέργεια για να βγει από το πηγάδι, σύμφωνα με τις προβλέψεις της κλασικής θεωρίας, υπάρχει κάποια πιθανότητα να βρεθεί έξω απ' αυτό.



Σχ. 7.16 (α) Γραφικές παραστάσεις της  $\Psi(x)$  για τους τρεις πρώτους κβαντικούς αριθμούς. (β) Οι αντίστοιχες ενεργειακές στάθμες του ηλεκτρονίου. (γ) Οι αντίστοιχες παραστάσεις για το  $|\Psi(x)|^2$ . Η τιμή του  $|\Psi(x)|^2$  για κάθε σημείο δείχνει την πιθανότητα να βρεθεί το ηλεκτρόνιο σ' ένα στοιχειώδες  $dx$  γύρω από το σημείο αυτό. Βλέπουμε ότι οι καμπύλες εκτείνονται και έξω από τα όρια του πηγαδιού.

Ας συνοψίσουμε όσα έχουμε μάθει μέχρι τώρα :

1. Το ηλεκτρόνιο – αντίθετα με ό,τι προβλέπει η κλασική θεωρία - δε μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή ενέργειας ή ορμής όταν βρίσκεται μέσα στο πηγάδι.
2. **Το ηλεκτρόνιο δεν ηρεμεί μέσα στην παγίδα του.** Η χαμηλότερη στάθμη κινητικής ενέργειας στην οποία μπορεί να βρεθεί αντιστοιχεί σε  $n=1$  και είναι διάφορη του μηδενός. Είναι κάτι που έρχεται σε αντίθεση με την κλασική θεωρία.
3. **Το ηλεκτρόνιο είναι πιθανότερο να βρεθεί σε ορισμένα τμήματα της παγίδας απ' ό,τι σε άλλα.** Αν βρίσκεται στη θεμελιώδη κατάσταση ( $n=1$ ) (αναφέρεται και σαν εδαφική κατάσταση) είναι πολύ πιθανότερο να

βρεθεί γύρω από το μέσον της παγίδας παρά κοντά στα άκρα της. Μόνο για ψηλές ενεργειακές στάθμες η πιθανότητα να βρίσκεται σε κάποια θέση κατανέμεται πιο ομοιόμορφα και συγκλίνει στην άποψη της κλασικής θεωρίας που θεωρεί όλες τις θέσεις εξίσου πιθανές.

4. **Το ηλεκτρόνιο μπορεί να διαφύγει από την παγίδα του.** Εάν το πηγάδι του δυναμικού δεν έχει άπειρο βάθος το ηλεκτρόνιο έχει κάποια πιθανότητα (μικρή αλλά όχι μηδενική) να βρεθεί έξω από το πηγάδι κι αν μην έχει την θεωρητικά απαιτούμενη ενέργεια για να συμβεί αυτό. Η πιθανότητα αυτή μεγαλώνει όσο το ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε ψηλότερη ενεργειακή στάθμη.

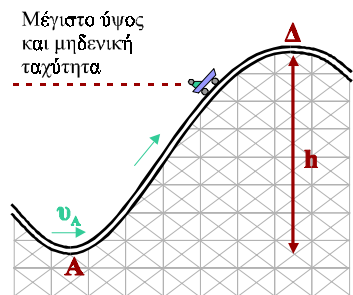
## 7-9 ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΣΗΡΑΓΓΑΣ

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε το παράδοξο ότι αν εγκλωβίσουμε ένα ηλεκτρόνιο μέσα σ' ένα πηγάδι δυναμικού υπάρχει η πιθανότητα να βρεθεί έξω από το πηγάδι. Είναι σαν να κλείνουμε ένα μπαλάκι σ' ένα κουτί κι αυτό, μερικές φορές, να βρίσκεται απ' έξω.

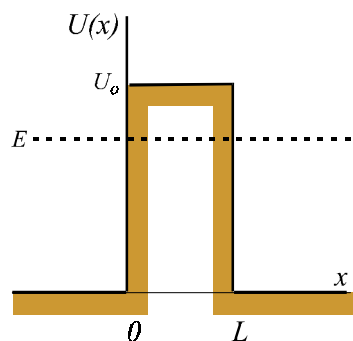
Ένα αντίστοιχο φαινόμενο είναι το φαινόμενο σήραγγας. Εδώ το ηλεκτρόνιο βρίσκεται αντιμέτωπο με ένα φράγμα δυναμικού ψηλότερο από την ενέργειά του. Σύμφωνα με την κλασική θεωρία το ηλεκτρόνιο θα ανακλαστεί και θα επιστρέψει πίσω. Η κβαντική θεωρία, όμως, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι, μερικές φορές, το ηλεκτρόνιο διαπερνάει το φράγμα. Η θεωρητική αυτή πρόβλεψη επιβεβαιώνεται πειραματικά. Είναι σαν να πετάμε ένα μπαλάκι σ' ένα τζάμι και κάποιες φορές το μπαλάκι να βρίσκεται από την άλλη μεριά χωρίς να σπάσει το τζάμι. Τέτοια φαινόμενα βέβαια δε συμβαίνουν ποτέ με σώματα όπως ένα μπαλάκι, συμβαίνουν όμως με σωματίδια όπως ένα ηλεκτρόνιο.

Ας δούμε πρώτα **τι είναι ένα φράγμα δυναμικού**. Ένα τρενάκι του λούνα παρκ (σχ. 7.17) έχει στο χαμηλότερο σημείο Α της διαδρομής του ταχύτητα  $v_A$ . Αν θεωρήσουμε ότι στο Α η δυναμική ενέργεια του τρένου είναι μηδενική τότε η ολική του ενέργεια  $E$  θα είναι  $E = K_A = \frac{1}{2} m v_A^2$ . Μπροστά στο τρενάκι βρίσκεται ένα ύψωμα ύψους  $h$  σε σχέση με το σημείο Α. Εάν το τρενάκι καταφέρει να βρεθεί στην κορυφή Δ του υψώματος θα έχει δυναμική ενέργεια  $U_\Delta = mgh$ . Ένα τέτοιο ύψωμα σαν αυτό που βρίσκεται μπροστά στο τρενάκι μπορεί να χαρακτηριστεί σαν ένα φράγμα δυναμικού ύψους  $mgh$ . Εάν δεν υπάρχουν τριβές και  $E \geq U_\Delta$  τότε το τρενάκι θα υπερπηδήσει το ύψωμα και θα συνεχίσει την πορεία του. Εάν  $E < U_\Delta$  το τρενάκι θα φτάσει μέχρι ένα ύψος μικρότερο του  $h$ , η ταχύτητά του θα μηδενιστεί και θα κυλήσει προς τα πίσω. Αντίστοιχα φράγματα δυναμικού μπορούμε να υλοποιήσουμε και στο ηλεκτρικό πεδίο, όπου το ρόλο του τρένου θα παίζει ένα ηλεκτρόνιο και το φράγμα δυναμικού θα αντιστοιχεί σε δυναμική ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου. (σχ. 7.18).

Η λύση της (7.6) αν λάβουμε υπόψη τους περιορισμούς που επιβάλλει το φράγμα δυναμικού δηλαδή  $U = 0$  για  $x < 0$  και  $x > L$  και  $U = U_0$  για  $0 \leq x \leq L$ , είναι της μορφής του σχήματος 7.19.

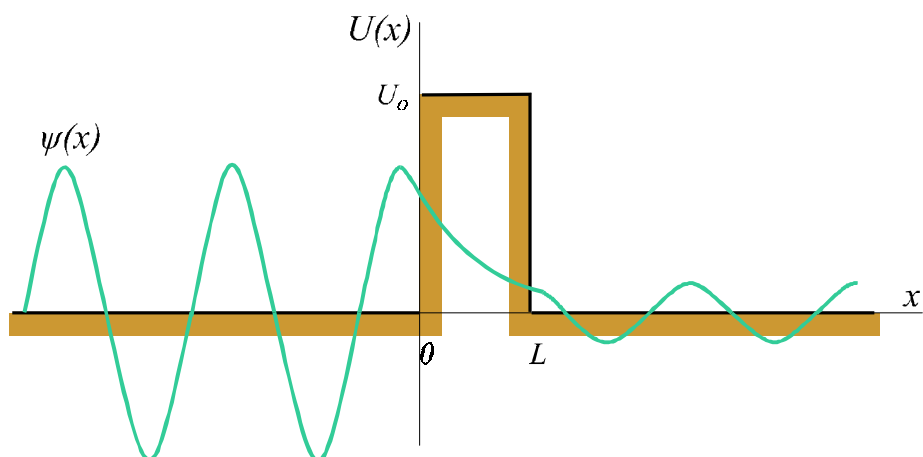


**Σχ. 7.17** Όταν  $E < U_\Delta$  το τρενάκι δεν μπορεί να υπερπηδήσει το φράγμα δυναμικού.



**Σχ. 7.18** Φράγμα δυναμικού ύψους  $U_0$ . Ένα ηλεκτρόνιο ενέργειας  $E < U_0$  σύμφωνα με την κλασική θεωρία δεν μπορεί να περάσει από τη μία πλευρά του φράγματος στην άλλη.

**Σχ. 7.19** Αριστερά και δεξιά του φράγματος η κυματοσυνάρτηση είναι ημιτονοειδής ενώ στο εσωτερικό του εκθετική φθίνουσα.



Βλέπουμε ότι η κυματοσυνάρτηση υπάρχει και δεξιά του φράγματος αν και με αισθητά μικρότερο πλάτος. Αυτό σημαίνει μικρότερη πιθανότητα ύπαρξης του ηλεκτρονίου δεξιά του φράγματος απ' ότι αριστερά.

Η πιθανότητα εμφάνισης του ηλεκτρονίου δεξιά του φράγματος εξαρτάται από την ενέργειά του  $E$  και το εύρος του φράγματος  $L$ . Πιο συγκεκριμένα, η πιθανότητα γίνεται μεγαλύτερη αν αυξηθεί η ενέργεια του ηλεκτρονίου (παραμένοντας μικρότερη από το ύψος του φράγματος  $U_0$ ) και αν ελαττωθεί το εύρος του φράγματος.

Το φαινόμενο σήραγγας έχει πολλές εφαρμογές.

Ο χαλκός οξειδώνεται. Ένα γυμνό σύρμα από χαλκό καλύπτεται από ένα λεπτό στρώμα οξειδίου του χαλκού που είναι μονωτής. Όμως, όλοι γνωρίζουμε ότι η επαφή δυο χάλκινων συρμάτων είναι αγωγήμη. Πώς μπορούν τα ηλεκτρόνια και περνούν από το ένα σύρμα στο άλλο; Με το φαινόμενο σήραγγας.

Κατά τη ραδιενεργό διάσπαση άλφα, ο πυρήνας εκπέμπει ένα σωματίο άλφα (πυρήνας του στοιχείου ήλιου). Για να διαφύγει το σωματίο άλφα από τον πυρήνα πρέπει να διαπεράσει ένα φράγμα δυναμικού που οφείλεται στις ελκτικές πυρηνικές δυνάμεις και στην απωστική δύναμη Coulomb ανάμεσα σε αυτό και στον υπόλοιπο πυρήνα. Σποραδικά, κάποιο σωματίο άλφα κατορθώνει να διαπεράσει αυτό το φράγμα.

Μια πυρηνική αντίδραση σύντηξης πραγματοποιείται όταν δύο πυρήνες έρθουν πολύ κοντά ώστε οι ισχυρές πυρηνικές τους δυνάμεις μπορέσουν να τους κάνουν να συσσωματωθούν και να προκαλέσουν τη σύντηξη. Το πλεονέκτημα όμως των πυρήνων παρεμποδίζεται από τις απωστικές δυνάμεις Coulomb που τείνουν να τους απομακρύνουν. Για να επιτευχθεί η σύντηξη οι δύο πυρήνες πρέπει να διαπεράσουν το φράγμα που δημιουργείται από τις απωστικές δυνάμεις. Αυτό συμβαίνει στον Ήλιο και σε όλα τα άλλα αστέρια.

Το φαινόμενο σήραγγας βρίσκει επίσης εφαρμογή στις διόδους σήραγγας, στο ηλεκτρονικό μικροσκόπιο σήραγγας και αλλού.



## ΣΥΝΟΨΗ

Το μέλαν σώμα είναι το ιδεατό εκείνο σώμα το οποίο απορροφά όλη την ακτινοβολία η οποία προσπίπτει πάνω του.

Οι υποθέσεις που έκανε ο Planck στην προσπάθειά του να ερμηνεύσει την ακτινοβολία του μέλανος σώματος είναι :

Η ενέργεια των ταλαντούμενων ατόμων δεν μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Μπορεί να πάρει μόνο διακριτές (κβαντισμένες) τιμές. Οι τιμές της ενέργειας που μπορεί να έχει το ταλαντούμενο άτομο είναι

$$E_n = nhf$$

όπου  $n$  ένας θετικός ακέραιος αριθμός που ονομάζεται **κβαντικός αριθμός**  $f$  η συχνότητα ταλάντωσης του ατόμου και  $h$  η σταθερά του Planck ( $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ).

Το ποσό της ενέργειας, υπό μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, που μπορεί να απορροφήσει ή να εκπέμψει ένα άτομο μπορεί να πάρει μόνο διακριτές τιμές.

Οι υποθέσεις αυτές αποτελούν το θεμέλιο της κβαντικής θεωρίας.

Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είναι το φαινόμενο κατά το οποίο μία μεταλλική επιφάνεια απελευθερώνει ηλεκτρόνια στο περιβάλλον όταν πάνω της προσπίπτει φως.

Το ελάχιστο ποσό ενέργειας που απαιτείται να προσφερθεί σ' ένα ηλεκτρόνιο ενός υλικού για να δραπετεύσει από το υλικό λέγεται **έργο εξαγωγής** και συμβολίζεται με το  $\phi$ .

Ο Einstein ερμήνευσε το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο με την παραδοχή ότι το φως μεταφέρει την ενέργειά του σε μικρά πακέτα, που ονομάζονται **κβάντα φωτός** ή **φωτόνια**.

Η ενέργεια κάθε φωτονίου είναι  $E = hf$

Η κινητική ενέργεια ενός φωτοηλεκτρονίου κατά την έξοδό του από την κάθοδο είναι

$$K = hf - \phi \quad (\text{φωτοηλεκτρική εξίσωση Einstein})$$

όπου  $h$  η σταθερά του Planck και  $\lambda$  του μήκους κύματος του φωτός.

Η ορμή κάθε φωτονίου είναι  $p = \frac{h}{\lambda}$

**Φαινόμενο Compton** είναι το φαινόμενο κατά το οποίο η σκεδαζόμενη ακτινοβολία X από ένα υλικό έχει μεγαλύτερο μήκος κύματος από την προσπίπτουσα. Η διαφορά εξαρτάται από τη γωνία σκέδασης.

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \sin \varphi)$$

Οποιοδήποτε σωματίο ορμής  $p$  είναι συνδεδεμένο με ένα κύμα, με μήκος κύματος  $\lambda$  που δίνεται από

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Η αρχή της αβεβαιότητας λέει ότι δεν είναι δυνατόν να μετρήσουμε και τη θέση και την ορμή ενός σωματιδίου, ταυτόχρονα, με απεριορίστη ακρίβεια.

Για ένα σωματίδιο που κινείται πάνω στον άξονα των  $x$   $\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{h}{2\pi}$

Η αβεβαιότητα στη μέτρηση της ενέργειας μιας κατάστασης ενός συστήματος είναι αντίστροφα ανάλογη με τον χρόνο που το σύστημα παραμένει σ' αυτή την κατάσταση.

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$$

**Κυματοσυνάρτηση  $\Psi$**  είναι η συνάρτηση της θέσης και του χρόνου που περιγράφει ένα σωματίδιο - κύμα . Η κυματοσυνάρτηση είναι λύση της εξίσωσης Schrödinger.

Το τετράγωνο του μέτρου της κυματοσυνάρτησης  $|\Psi|^2$  για συγκεκριμένο σημείο κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή είναι η **πιθανότητα εύρεσης του σωματιδίου ανά μονάδα όγκου** (πυκνότητα πιθανότητας). Η πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίδιο κάπου στο χώρο είναι ίση με τη μονάδα

$$\sum |\Psi|^2 dV = 1 \quad (\text{συνθήκη κανονικοποίησης})$$

**Πηγάδι δυναμικού** είναι μια περιοχή του χώρου όπου αν βρεθεί ένα σωματίο θα έχει μικρότερη δυναμική ενέργεια απ' ότι σε οποιοδήποτε άλλο σημείο του περιβάλλοντος χώρου. Εάν η διαφορά της δυναμικής ενέργειας μεταξύ σημείων εκτός του πηγαδιού και εντός του πηγαδιού είναι  $U_0$  και το σωματίο έχει κινητική ενέργεια μικρότερη του  $U_0$  τότε το σωματίο παγιδεύεται στο πηγάδι.

-Το σωματίο δεν μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή ενέργειας ή ορμής όταν βρίσκεται μέσα στο πηγάδι.

-Το σωματίο δεν μπορεί να ηρεμεί μέσα στην παγίδα του.

-Το σωματίο είναι πιθανότερο να βρεθεί σε ορισμένα τμήματα της παγίδας απ' ότι σε άλλα.

-Το σωματίο είναι πιθανόν να βρεθεί και εκτός πηγαδιού.

**Φαινόμενο σήραγγας** είναι το φαινόμενο κατά το οποίο ένα σωματίο διαπερνά ένα φράγμα δυναμικού χωρίς να έχει την κλασικά απαιτούμενη ενέργεια γι' αυτό.

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

### Μέλαν σώμα

- 7.1 Παρατηρώντας μία νύχτα τον ουρανό με ένα τηλεσκόπιο πώς μπορούμε να ξεχωρίζουμε τα άστρα που έχουν επιφανειακή θερμοκρασία μικρότερη από αυτήν του Ήλιου;
- 7.2 Υπάρχουν κβαντισμένες ποσότητες στην κλασική φυσική; Αν ναι, δώστε ένα παράδειγμα.
- 7.3 Τα ηλεκτρόνια και τα φωτόνια είναι σωματίια. Σε τι διαφέρουν μεταξύ τους;
- 7.4 Μιλάμε για φωτόνια ερυθρού φωτός ή φωτόνια ιώδους φωτός. Μπορούμε να μιλήσουμε για φωτόνια λευκού φωτός;

### Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

- 7.5 Πώς ερμηνεύεται το γεγονός ότι οι φωτοηλεκτρικές μετρήσεις εξαρτώνται από τη φύση της φωτοηλεκτρικής επιφάνειας;
- 7.6 Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι ορθές;
  - α) Αν αυξήσουμε την ένταση μιας μονοχρωματικής δέσμης που προσπίπτει στην κάθοδο του φωτοκύτταρου αυξάνεται ο αριθμός των ηλεκτρονίων που εκπέμπονται σε ορισμένο χρόνο.

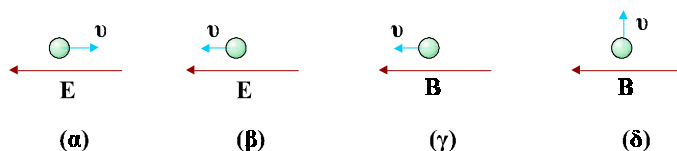
- β) Ο αριθμός των εκπεμπόμενων φωτοηλεκτρονίων για ορισμένη έντασης φωτεινή μονοχρωματική δέσμη, εξαρτάται από το μήκος κύματος της δέσμης.
- γ) Τα φωτοηλεκτρόνια βγαίνουν με μεγαλύτερη ταχύτητα όταν η συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας μεγαλώνει.
- δ) Για να παρατηρηθεί το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο απαιτείται μονοχρωματική ακτινοβολία
- 7.7 Οι επόμενες προτάσεις αφορούν στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Ποιες από αυτές είναι ορθές;
- α) Η τάση αποκοπής εξαρτάται από τη συχνότητα της φωτεινής δέσμης και είναι μεγαλύτερη για την κίτρινη ακτινοβολία παρά για την πράσινη ( $f_k > f_\pi$ ).
- β) Η αύξηση της έντασης της δέσμης συνεπάγεται αύξηση της συχνότητας κατωφλίου.
- γ) Η συχνότητα κατωφλίου εξαρτάται από το έργο εξαγωγής του μετάλλου και είναι μεγαλύτερη για το κάλιο ( $\phi_k = 2,2 \text{ eV}$ ) από ό,τι για το καίσιο ( $\phi_{Cs} = 1,4 \text{ eV}$ ).
- δ) Η τάση αποκοπής εξαρτάται από το έργο εξαγωγής του μετάλλου και είναι μεγαλύτερη για το κάλιο ( $\phi_k = 2,2 \text{ eV}$ ) από ό,τι για το καίσιο ( $\phi_{Cs} = 1,4 \text{ eV}$ ).
- ε) Τα φωτοηλεκτρόνια έχουν μεγαλύτερη κινητική ενέργεια όταν η κάθοδος φωτίζεται με κίτρινο φως από ό,τι όταν φωτίζεται με πράσινο φως ( $f_k > f_\pi$ ).
- στ) Η τάση αποκοπής εξαρτάται από την ενέργεια των φωτονίων της φωτεινής δέσμης και ελαττώνεται όταν φωτίζουμε την κάθοδο με φωτόνια μεγαλύτερης ενέργειας.

### Φαινόμενο Compton

- 7.8 Συμπληρώστε τα κενά:  
Το μήκος κύματος της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας X κατά το φαινόμενο Compton είναι ..... από αυτό της προσπίπτουσας. Αυτό σημαίνει ότι τα σκεδαζόμενα ..... είναι ..... ενέργειας από τα προσπίπτοντα. Η διαφορά της ενέργειας των ..... ισούται με την ενέργεια του .....
- 7.9 Δύο δέσμες ακτίνων X με μήκη κύματος  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  (με  $\lambda_1 > \lambda_2$ ) σκεδάζονται σε ηλεκτρόνια. Για την ίδια γωνία σκέδασης σε ποια από τις δύο περιπτώσεις αντιστοιχεί
- α) μεγαλύτερο κύματος της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας
- β) μεγαλύτερη τιμή της ενέργειας του ανακρουόμενου ηλεκτρονίου.
- 7.10 Η διαφορά μεταξύ των μηκών κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας X και της σκεδαζόμενης γίνεται μέγιστη όταν η γωνία μεταξύ της σκεδαζόμενης και της προσπίπτουσας δέσμης είναι
- α)  $0^\circ$
- β)  $45^\circ$
- γ)  $90^\circ$
- Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

## Η κυματική φύση της ύλης

- 7.11 Ένα ηλεκτρόνιο, ένα σωματίο άλφα και ένα νετρόνιο κινούνται με ταχύτητες αρκετά μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός και έχουν την ίδια κινητική ενέργεια. Σε ποιο από τα σωματίδια αντιστοιχεί το μεγαλύτερο και σε ποιο το μικρότερο μήκος κύματος de Broglie;
- 7.12 Στο σχήμα φαίνονται τέσσερις περιπτώσεις ηλεκτρονίων που κινούνται μέσα σε ηλεκτρικό ή μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Σε ποια ή σε ποιες περιπτώσεις το μήκος κύματος de Broglie α) μεγαλώνει; β) μικραίνει; γ) μένει ίδιο;



Σχ. 7.20

- 7.13 Η υπόθεση de Broglie ότι σε κάθε κινούμενο σώμα αντιστοιχεί ένα κύμα δεν έχει εφαρμογή στα φαινόμενα της καθημερινής ζωής. Αυτό συμβαίνει γιατί το αντίστοιχο μήκος κύματος
- α) είναι πολύ μικρό ή  
β) είναι πολύ μεγάλο;

## Αρχή της αβεβαιότητας

- 7.14 Η αρχή της αβεβαιότητας δεν αφορά στην καθημερινότητά μας. Πού οφείλεται αυτό;

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο – Ορμή φωτονίων

- 7.15 Τα ηλεκτρόνια που βγαίνουν από την επιφάνεια ενός μετάλλου που φωτίζεται με μονοχρωματική ακτινοβολία μήκους κύματος 400nm έχουν κινητική ενέργεια 0,8eV. Με ποια ενέργεια εκπέμπονται φωτοηλεκτρόνια από την ίδια επιφάνεια με ακτινοβολία μήκους κύματος 500nm; Δίνονται  $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ,  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ,  $1\text{eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ .  
[Απ : 0,18 eV]
- 7.16 Φωτεινή ακτινοβολία μήκους κύματος 400 nm προσπίπτει σε μεταλλική επιφάνεια. Αυτή εκπέμπει φωτοηλεκτρόνια που έχουν ταχύτητα  $8 \times 10^5 \text{ m/s}$ . Ποιο είναι το έργο εξαγωγής για το μέταλλο της καθόδου; Δίνονται  $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ,  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ,  $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $1\text{eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ .  
[Απ : 1,3 eV]

- 7.17 Το έργο εξαγωγής για ένα μέταλλο είναι 1,8 eV. Ποιο θα είναι το δυναμικό αποκοπής για φως που έχει μήκος κύματος 400 nm; Δίνονται  $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ,  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ,  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ,  $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ .  
[Απ : 1,3 V]
- 7.18 Ποια από τα παρακάτω υλικά δίνουν φωτοηλεκτρόνια όταν φωτίζονται με ορατό φως (400-700 nm); Ταντάλιο (4,2 eV), Βολφράμιο (4,5 eV), Βάριο (2,5 eV), Λίθιο (2,3 eV). Στην παρένθεση αναφέρεται το έργο εξαγωγής του αντίστοιχου μετάλλου. Δίνονται  $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ,  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ,  $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ .  
[ Απ : Βάριο και Λίθιο ]
- 7.19 Το δυναμικό αποκοπής για μια μεταλλική επιφάνεια που φωτίζεται με φως μήκους κύματος 491 nm είναι 0,71 V. Όταν η ίδια επιφάνεια φωτιστεί με φως άλλου μήκους κύματος, το δυναμικό αποκοπής γίνεται 1,43 V. Να υπολογίσετε: α) το έργο εξαγωγής για το μέταλλο αυτό και. β) το νέο μήκος κύματος. Δίνονται  $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ,  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ,  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ,  $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ .  
[Απ : 1,82 eV, 382 nm ]
- 7.20 Η συχνότητα κατωφλίου για ένα μέταλλο είναι  $5,6 \times 10^{14} \text{ Hz}$ . Να βρεθεί η κινητική ενέργεια με την οποία εγκαταλείπει το μέταλλο ένα φωτοηλεκτρόνιο όταν το μέταλλο φωτίζεται με φως συχνότητας  $8,6 \times 10^{14} \text{ Hz}$ . Δίνονται  $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ,  $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ .  
[Απ : 1,2 eV]
- 7.21 Μια λάμπα που έχει ισχύ 200 W, εκπέμπει ομοιόμορφα σε όλες τις διευθύνσεις μονοχρωματικό φως μήκους κύματος 600 nm. Σε απόσταση 10 m από τη λάμπα και ακριβώς πίσω από κυκλικό άνοιγμα ακτίνας 20 mm βρίσκεται αισθητήρας. Πόσα φωτόνια φτάνουν στον αισθητήρα σε χρόνο 0,1 s;  
Θα υποθέσετε ότι όλη η ενέργεια της λάμπας γίνεται φωτεινή ενέργεια. Δίνονται  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$  και  $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ Js}$ .  
[Απ:  $6,03 \times 10^{13}$  φωτόνια ]
- 7.22 Τι μήκος κύματος πρέπει να έχει μια ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία ώστε ένα φωτόνιο της να έχει την ίδια ορμή με ένα ηλεκτρόνιο που κινείται με ταχύτητα  $2 \times 10^5 \text{ m/s}$ ;  
Δίνονται:  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ,  $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J s}$ ,  $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ .  
[Απ: 3,64 nm ]
- 7.23 Πόσα φωτόνια με μήκος κύματος  $\lambda = 663 \text{ nm}$  πρέπει να προσκρούουν ανά δευτερόλεπτο κάθετα σε μια απόλυτα ανακλαστική επιφάνεια, ώστε να ασκήσουν σ' αυτή δύναμη 1N.  
Δίνεται  $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J s}$ .  
[Απ:  $5 \times 10^{26}$  φωτόνια/s ]

- 7.24 Επιφάνεια Ni, για το οποίο το έργο εξαγωγής είναι 5 eV, δέχεται υπεριώδη ακτινοβολία μήκους κύματος 200 nm. Ποιο το δυναμικό αποκοπής; Δίνονται:  $c=3 \times 10^8 \text{ m/s}$   $h=6,63 \times 10^{-34} \text{ J s}$   $1\text{eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ .  
[Απ: 1,2V ]
- 7.25 Το έργο εξαγωγής για το νάτριο είναι 2,7 eV. Ποιο είναι το μεγαλύτερο μήκος κύματος που μπορεί να προκαλέσει φωτοηλεκτρική εκπομπή από το νάτριο; Δίνονται:  $c=3 \times 10^8 \text{ m/s}$   $h=6,63 \times 10^{-34} \text{ Js}$ ,  $1\text{eV}=1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ .  
[Απ: 460 nm ]
- 7.26 Μια μεταλλική επιφάνεια φωτίζεται με φως μήκους κύματος  $\lambda_1=550\text{nm}$  και εκπέμπει φωτοηλεκτρόνια για τα οποία το δυναμικό αποκοπής είναι  $V_1=0,19\text{V}$ . Να υπολογίσετε:  
α) το έργο εξαγωγής του μετάλλου.  
β) το δυναμικό αποκοπής στην περίπτωση που η επιφάνεια φωτίζεται με ακτινοβολία μήκους κύματος  $\lambda_2=190\text{nm}$ .  
γ) τη συχνότητα κατωφλίου για το μέταλλο αυτό.  
Δίνονται:  $c=3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ,  $h=6,63 \times 10^{-34} \text{ Js}$ ,  $e=1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ,  $1\text{eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ .  
[Απ: 2,07eV, 4,47V,  $500 \times 10^{12} \text{ Hz}$  ]

### Φαινόμενο Compton

- 7.27 Φωτόνια μήκους κύματος 2,4 pm προσπίπτουν σε ελεύθερα ηλεκτρόνια. Να βρείτε το μήκος κύματος ενός φωτονίου που σκεδάστηκε α) κατά  $30^\circ$  και β) κατά  $60^\circ$ . Δίνονται:  
 $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ,  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ,  $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ .  
[Απ : 2,7 pm, 3,6 pm ]
- 7.28 Φωτόνιο ακτίνων X μήκους κύματος  $10^{-11} \text{ m}$  προσκρούει σε ηλεκτρόνιο μετωπικά και σκεδάζεται κατά  $180^\circ$ . Υπολογίστε πόσο μεταβλήθηκε η ενέργεια του φωτονίου.  
Δίνονται  $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ,  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ,  
 $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $1\text{eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ .  
[Απ : Μειώθηκε κατά 41,4 keV]
- 7.29 Μια δέσμη φωτονίων που έχουν ενέργεια 0,2 MeV σκεδάζεται από τα ηλεκτρόνια ενός στόχου από άνθρακα.  
α) Ποιο είναι το μήκος κύματος των φωτονίων της δέσμης πριν τη σκέδαση;  
β) Ποιο είναι το μήκος κύματος των φωτονίων που σκεδάζονται κατά γωνία  $90^\circ$  σε σχέση με την αρχική τους διεύθυνση;  
γ) Ποια είναι η ενέργεια ενός φωτονίου το οποίο έχει σκεδαστεί κατά γωνία  $60^\circ$  σε σχέση με την αρχική του διεύθυνση;  
Δίνονται:  $c=3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ,  $h=6,63 \times 10^{-34} \text{ Js}$ ,  $1\text{eV}=1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ ,  $m_e=9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ .  
[Απ:  $6,2 \times 10^{-12} \text{ m}$ ,  $8,6 \times 10^{-12} \text{ m}$ , 0,168 MeV ]



## Κυματική φύση της ύλης

- 7.30 Να βρείτε το μήκος κύματος de Broglie που αντιστοιχεί
- α) σε ηλεκτρόνιο ( $m_e=9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ) που κινείται με ταχύτητα  $2 \times 10^6 \text{ m/s}$ .
  - β) σε πρωτόνιο ( $m_p=1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ) της ίδιας ταχύτητας.
  - γ) σε μπαλάκι ( $m=0,2 \text{ kg}$ ) της ίδιας ταχύτητας.
- Δίνεται  $h=6,63 \times 10^{-34} \text{ J s}$   
[Απ:  $3,6 \times 10^{-10} \text{ m}$ ,  $2 \times 10^{-13} \text{ m}$ ,  $1,65 \times 10^{-39} \text{ m}$  ]
- 7.31 Ένα ηλεκτρόνιο επιταχύνεται από την ηρεμία με τάση  $150 \text{ V}$ . Να υπολογίσετε το μήκος κύματος de Broglie του ηλεκτρονίου. Δίνονται  $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ,  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ,  $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ .
- [Απ:  $10^{-10} \text{ m}$  ]
- 7.32 α) Ποια είναι η ενέργεια ενός φωτονίου με μήκος κύματος  $1 \text{ nm}$ ;  
β) Ποια είναι η κινητική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου για το οποίο το μήκος κύματος de Broglie είναι  $1 \text{ nm}$ ;
- Δίνονται:  $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ,  $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ,  
 $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ,  $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ .  
[Απ:  $1242 \text{ eV}$ ,  $1,5 \text{ eV}$  ]

## Αρχή της αβεβαιότητας

- 7.33 Αν υποθέσουμε ότι η σταθερά του Planck είχε την τιμή  $0,6 \text{ J s}$ , ποια θα ήταν η αβεβαιότητα θέσης για μια μπάλα μάζας  $0,5 \text{ kg}$  που κινείται με ταχύτητα  $20 \text{ m/s}$  αν η αβεβαιότητα της ορμής της είναι  $1\%$ ;  
Θα μπορούσαμε να πιάσουμε εύκολα αυτή τη μπάλα;  
[Απ:  $\Delta x \geq 0,96 \text{ m}$ ]
- 7.34 Το ηλεκτρόνιο ενός ατόμου του υδρογόνου παραμένει στην κατάσταση  $n=2$  - πριν μεταπέσει στην κατάσταση  $n=1$  – επί  $10^{-8} \text{ s}$ . Ποια είναι η αβεβαιότητα στην ενέργεια του εκπεμπόμενου φωτονίου; Δίνεται  $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ,  $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ .  
[Απ:  $0,66 \times 10^{-7} \text{ eV}$  ]
- 7.35 Ένα σωματίδιο κινείται σε ευθεία, με ταχύτητα πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός. Αν η αβεβαιότητα  $\Delta x$  της θέσης του είναι ίση με το μήκος κύματος που έχει κατά de Broglie, δείξτε ότι η αβεβαιότητα της ταχύτητας του είναι  $\Delta v_x \geq \frac{1}{2\pi} v_x$ .



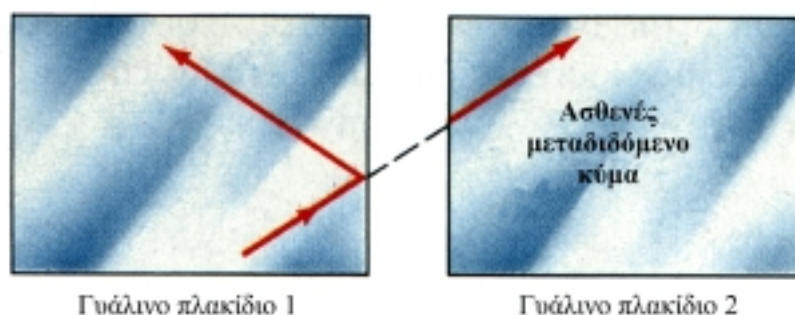
## ΤΟ ΜΙΚΡΟΣΚΟΠΙΟ ΣΑΡΩΣΗΣ ΣΗΡΑΓΓΑΣ (SCANNING TUNNELING MICROSCOPE STM)

Η υπόθεση της ύπαρξης των ατόμων υφίσταται χιλιάδες χρόνια. Ξεκινάει τουλάχιστον από το Δημόκριτο. Μέχρι πρόσφατα τα άτομα παρέμεναν υποθετικά και όχι παρατηρήσιμα.

Το 1982 οι Ελβετοί φυσικοί Gerd Binnig και Heinrich Rohrer ανέπτυξαν το μικροσκόπιο σάρωσης σήραγγας (STM) που μας έδωσε τη δυνατότητα να «δούμε» άτομα. Για την ανακάλυψή τους τιμήθηκαν με το βραβείο Νόμπελ μόλις τέσσερα χρόνια μετά.

Η λειτουργία του STM στηρίζεται στο κβαντομηχανικό φαινόμενο της σήραγγας. Εδώ θα ξεκινήσουμε χρησιμοποιώντας ένα κοντινό ανάλογο, το φαινόμενο της ολικής εσωτερικής ανάκλασης (παράγραφος 2-10) για να καταλάβουμε την αρχή λειτουργίας του STM.

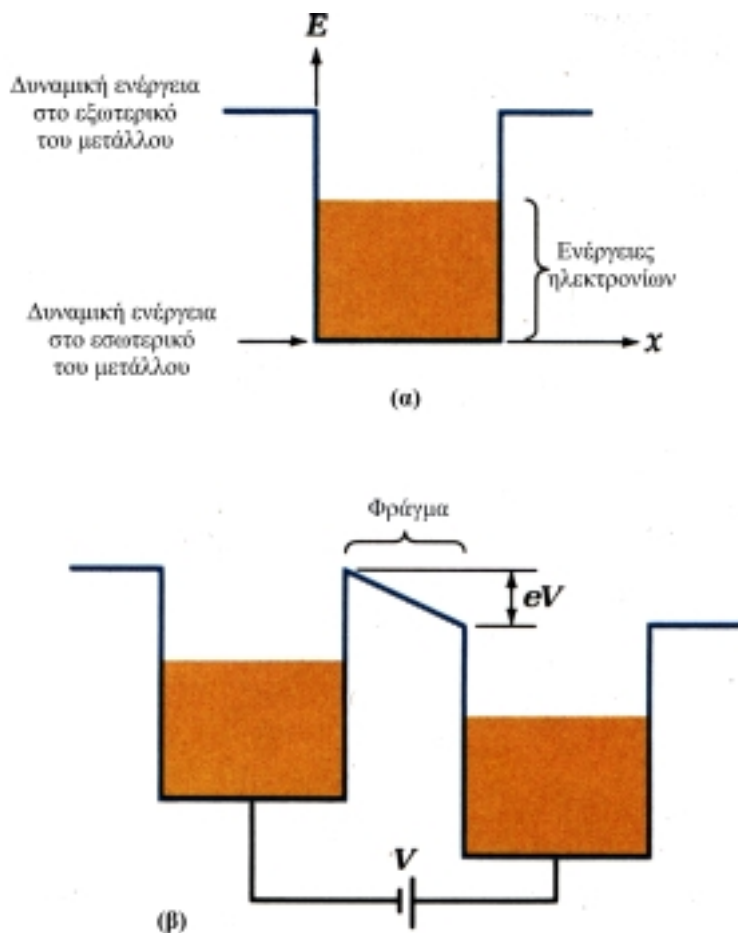
Μία μονοχρωματική δέσμη φωτός που διαδίδεται μέσα σε ένα γυάλινο πλακίδιο και προσπίπτει σε μια έδρα του με γωνία μεγαλύτερη από την κρίσιμη ( $\theta_{crit}$ ) ανακλάται κατά εκατό τοις εκατό. Το φαινόμενο λέγεται ολική εσωτερική ανάκλαση. Στην πραγματικότητα το κύμα του φωτός δε σταματάει ακαριαία πάνω στην ανακλαστική επιφάνεια. Για πολύ μικρό διάστημα, ένα τμήμα της δέσμης, συνεχίζει την πορεία του και έξω από το γυάλινο πλακίδιο. Αυτό μπορούμε να το δείξουμε πλησιάζοντας ένα δεύτερο γυάλινο πλακίδιο κοντά στο πρώτο. Το φωτεινό κύμα που πέρασε έξω από το πρώτο γυάλινο πλακίδιο και εξασθενεί ταχύτατα παραλαμβάνεται από το δεύτερο πλακίδιο και διαδίδεται μέσα σ' αυτό. Η ένταση του μεταδιδόμενου κύματος στο δεύτερο πλακίδιο εξαρτάται από το πόσο κοντά φέραμε τα δύο πλακίδια μεταξύ τους (σχ. 7.21).



Σχ. 7.21

Μια από τις σημαντικότερες ανακαλύψεις του εικοστού αιώνα είναι ότι τα σωματίδια συμπεριφέρονται ως κύματα. Όπως το φως μπορεί να διαπεράσει την «απαγορευμένη περιοχή» ανάμεσα στα πλακίδια έτσι και τα σωματίδια μπορούν να διαπεράσουν με το φαινόμενο σήραγγας περιοχές που σύμφωνα με την κλασική θεωρία είναι απαγορευμένες. Ένα απλό παράδειγμα του φαινομένου σήραγγας έχουμε στην περίπτωση δύο μετάλλων που βρίσκονται πολύ κοντά το ένα στο άλλο χωρίς όμως να έρχονται σε επαφή. Μια διαφορά δυναμικού εφαρμόζεται ανάμεσα στα δύο μέταλλα (σχ.7.22β). Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του κομματιού στα αριστερά δεν έχουν αρκετή ενέργεια για να περάσουν στο κομμάτι στα δεξιά. Εντούτοις, όπως τα φωτεινά κύματα, τα κύματα που είναι συνδεδεμένα με τα ηλεκτρόνια δε σταματούν ακαριαία στα όρια της επιφάνειας του μετάλλου αλλά εκτείνονται και έξω από αυτό εξασθενώντας πολύ γρήγορα. Εάν το κενό ανάμεσα στα δύο κομμάτια μετάλλου εί-

ναι πολύ μικρό, το ηλεκτρόνιο – κύμα μπαίνει στο δεύτερο κομμάτι πριν εξασθενήσει ολοκληρωτικά και διαδίδεται μέσα σ' αυτό. Ένα ρεύμα ρέει ανάμεσα στα δύο μεταλλικά ηλεκτρόδια. Το ρεύμα αυτό αυξάνεται εκθετικά καθώς τα δύο τμήματα μετάλλου πλησιάζουν μεταξύ τους.



**Σχ. 7.22** (α) Τα ηλεκτρόνια στο εσωτερικό ενός μετάλλου είναι «φυλακισμένα» μέσα σ' αυτό γιατί βρίσκονται μέσα σ' ένα πηγάδι δυναμικού παραγόμενο από την έλξη των θετικών πυρήνων. Οι ενέργειες των ηλεκτρονίων αντιστοιχούν στη σκιασμένη περιοχή. Είναι φανερό ότι τα ηλεκτρόνια δεν έχουν αρκετή ενέργεια για να «δραπετεύσουν από το μέταλλο».

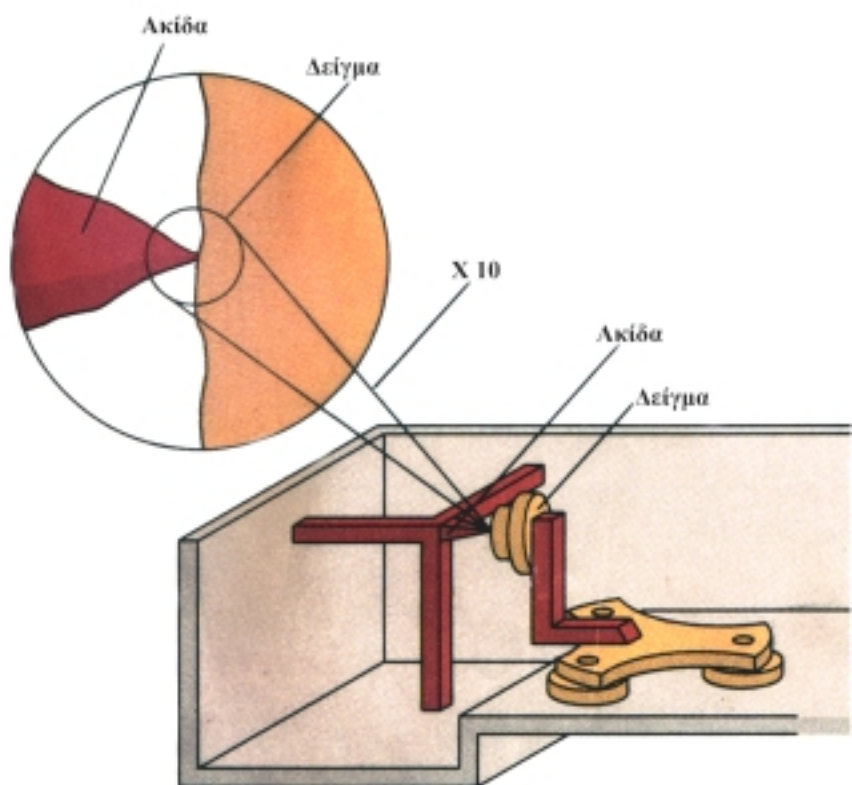
(β) Εφαρμόζοντας μια διαφορά δυναμικού ανάμεσα σε δύο γειτονικά μεταλλικά τμήματα ψηλώνουμε τα τοιχώματα δυναμικής ενέργειας του ενός πηγαδιού σε σχέση με το άλλο κατά  $eV$ . Σύμφωνα με την κλασική θεωρία ένα φράγμα δυναμικού εξακολουθεί να εμποδίζει τα ηλεκτρόνια να περάσουν από το ένα τμήμα στο άλλο. Η κβαντομηχανική προβλέπει ότι κάποια ηλεκτρόνια μπορούν να διαπεράσουν το φράγμα.

Οι Binnig και Rohrer πέτυχαν να κατασκευάσουν ένα μικροσκόπιο εκμεταλλευόμενοι το φαινόμενο σήραγγας. Το εγχείρημα παρουσίασε μεγάλες δυσκολίες. Η τελική επιτυχία αποτελεί απόδειξη της ιδιοφυΐας των ερευνητών.

Η κεντρική ιδέα τους ήταν να μιμηθούν κάποιον που προσπαθεί να προσδιορίσει την υφή μιας ανώμαλης επιφάνειας μέσα σε ένα σκοτεινό δωμάτιο σαρώνοντας σχολαστικά την επιφάνεια με τα δάκτυλά του πολλές φορές.

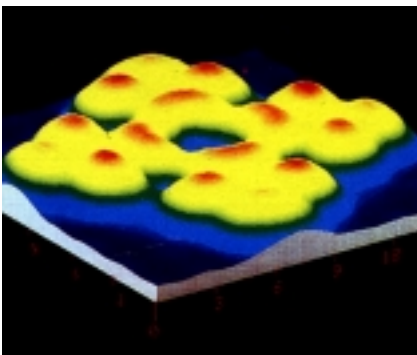
Υποθέστε ότι αντί για ένα δάκτυλο χρησιμοποιούμε μια πολύ αιχμηρή ακίδα την οποία πλησιάζουμε σ' ένα αγωγίμο δείγμα χωρίς να την φέρνουμε ποτέ σε επαφή με αυτό. Εφαρμόζοντας μια διαφορά δυναμικού, από λίγα

millivolts έως λίγα volts, ανάμεσα στην ακίδα και το δείγμα προκαλούμε ένα ρεύμα σήραγγας της τάξεως των  $10^{-9}$  A (nA). Εάν η ακίδα κινείται παράλληλα στην επιφάνεια του δείγματος, το ρεύμα μεγαλώνει ή μικραίνει ανάλογα με το αν το δείγμα παρουσιάζει «λόφους» και «κοιλάδες» στην επιφάνειά του. Για να διατηρηθεί το ρεύμα σταθερό πρέπει η απόσταση ακίδας -δείγματος να διατηρείται σταθερή. Πρέπει δηλαδή η ακίδα να κινείται συνεχώς πλησιάζοντας ή απομακρυνόμενη από το δείγμα. Παρακολουθώντας την κίνηση της ακίδας έχουμε μια εικόνα των ανωμαλιών που παρουσιάζει η επιφάνεια του δείγματος σε κάθε θέση.

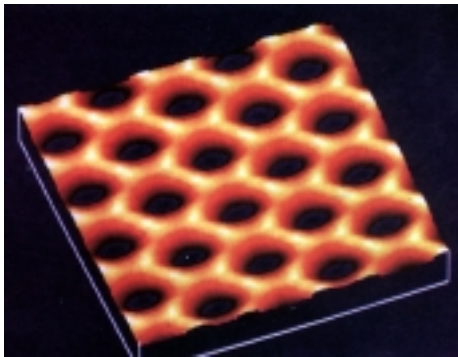


Σχ. 7.23

Με πολλαπλές σαρώσεις της επιφάνειας του δείγματος και με εξομοιώσεις που πετυχαίνουμε με τη βοήθεια ηλεκτρονικών υπολογιστών καταλήγουμε σε απεικονίσεις αγωγίμων επιφανειών σε ατομική κλίμακα, όπως στις εικόνες 7.9 και 7.10.



Εικ. 7.9 Προσμίξεις ατόμων χρυσού σε επιφάνεια γραφίτη.



Εικ. 7.10 Άτομα άνθρακα στην επιφάνεια γραφίτη

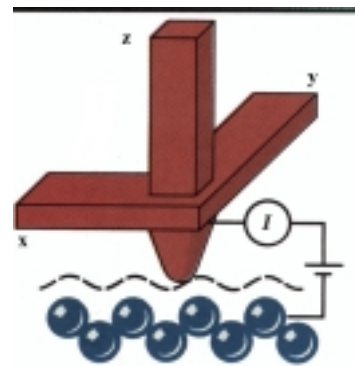
Γεννιέται το ερώτημα πώς είναι δυνατόν η ακίδα να κινείται μπρος – πίσω με την απαιτούμενη ακρίβεια κατά τη σάρωση της επιφάνειας; Σίγουρα αυτό δεν θα μπορούσε να γίνει με μηχανικό τρόπο, με βίδες και γρανάζια. Οι Binnig και Rohrer χρησιμοποίησαν πιεζοηλεκτρικούς κρυστάλλους για να στερεώσουν την ακίδα τους και να ελέγξουν την κίνησή της στο επίπεδο  $xy$  (σάρωση) και στον άξονα  $z$  (πλησίασμα – απομάκρυνση).

Οι πιεζοηλεκτρικοί κρύσταλλοι αναπτύσσουν στα άκρα τους μια διαφορά δυναμικού όταν συμπιέζονται και, αντίστροφα, συμπιέζονται ή εκτείνονται όταν μια διαφορά δυναμικού εφαρμόζεται σ' αυτούς.

Εάν εφαρμοστεί η κατάλληλη διαφορά δυναμικού στους  $x$  και  $y$  κρυστάλλους μπορούμε να εξασφαλίσουμε την κίνηση σάρωσης της ακίδας με ταχύτητες της τάξης των 10 nm/s.

Καθώς η σάρωση προχωράει, ένα κύκλωμα «νιώθει» κάθε αλλαγή στο ρεύμα σήραγγας και παράγει την κατάλληλη τάση, που εφαρμόζεται στον κρύσταλλο  $z$  μετακινώντας την ακίδα μέχρι να αποκατασταθεί η σταθερότητα του ρεύματος σήραγγας.

Από την αρχή λειτουργίας του το STM, δε μπορεί να απεικονίσει επιφάνειες μη αγώγιμων υλικών. Για τέτοιου είδους απεικονίσεις χρησιμοποιείται το SFM (Scanning Force Microscope), το οποίο στηρίζεται στην ανίχνευση των απωστικών δυνάμεων που αναπτύσσονται ανάμεσα στα άτομα όταν αυτά πλησιάσουν πολύ μεταξύ τους.



Σχ. 7.24