ΘΕΜΑ 1º

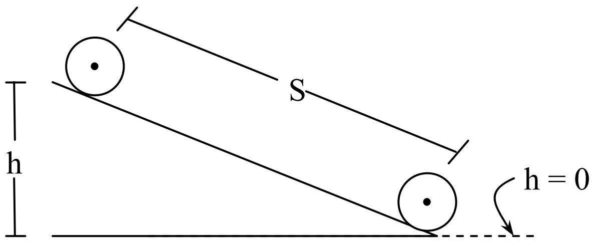
Β
Α
Γ
Α

Λ
Σ
Λ
Λ
Σ

ΘΕΜΑ 2º

Α.

Απάντηση:



Άξονας x:

$$\sum \vec{F}_x = M\vec{a}_{cm} \Rightarrow \vec{W}_x + \vec{T} = M\vec{a}_{cm} \Rightarrow Mg\eta\mu\varphi - T = Ma_{cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = Mg(\eta\mu\varphi - a_{cm}) \quad (1)$$

Για τον κάθε κύλινδρο και την στροφική του κίνηση γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδο κίνησης που διέρχεται από το κέντρο μάζας ισχύει:

$$\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha} \Rightarrow T \cdot R = I_{cm}\alpha \Rightarrow T \cdot R = \frac{1}{2}MR^2\alpha \Rightarrow T = \frac{1}{2}MR\alpha\,,$$

όμως η κίνηση του κυλίνδρου είναι κύλιση οπότε $\alpha = \frac{a_{cm}}{R}$ και επομένως έχουμε:

$$T = \frac{1}{2}MR\frac{a_{cm}}{R} \Rightarrow T = \frac{1}{2}Ma_{cm} \quad (2)$$

Από τις (1), (2) έχουμε:

$$M(g\eta\mu\varphi - a_{cm}) = \frac{1}{2}Ma_{cm} \Rightarrow g\eta\mu\varphi = \frac{3}{2}a_{cm} \Rightarrow \boxed{a_{cm} = \frac{2}{3}g\eta\mu\varphi}$$

Είναι όμως $S = \frac{1}{2}a_{cm}t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2S}{a_{cm}}$ που σημαίνει ότι και τα δύο σώματα θα φτάσουν ταυτόχρονα!

<u>Β.</u>
<u>Απάντηση</u>
Η κινητική ενέργεια της σφαίρας λόγω της ιδιοπεριστροφής της παραμένει σταθερή αφού δεν αλλάζει η γωνιακή της ταχύτητα. Πράγματι, η στροφορμή της σφαίρας παραμένει σταθερή μιας και η μοναδική δύναμη που της ασκείται είναι το βάρος της, δύναμη η οποία διέρχεται από το κέντρο μάζας της και συνεπώς η ροπή της είναι μηδενική. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας όμως αυξάνεται αφού η δύναμη του βάρους επιταχύνει το σώμα. Έτσι η κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης αυξάνεται και έτσι αυξάνεται και η ολική κινητική ενέργεια άρα η σωστή απάντηση είναι η Γ.

<u>Γ.</u>
<u>Απάντηση:</u>

Γνωρίζουμε ότι σε μία φθίνουσα μηχανική ταλάντωση ισχύει:

$$\frac{A_o}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \ldots = \frac{A_n}{A_{n+1}} = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A_2 = \dfrac{A_1^2}{A_o} = \dfrac{12^2}{16} \Rightarrow A_2 = 9\mathrm{m} \\ \tau\eta\nu\ t = 2\sec \Rightarrow \upsilon = 0, x = A_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x=9m}$$

Σωστή η απάντηση β).

<u>Δ.</u>
<u>Απάντηση</u>
Γνωρίζω ότι $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ και αφού υποτετραπλασιάζουμε την τιμή του συντελεστή αυτεπαγωγής L θα ισχύει $f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{L}{4}C}} = \frac{2}{2\pi\sqrt{LC}} = 2f_o$, δηλαδή η ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος θα διπλασιαστεί. Έτσι η νέα ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος είναι πιο μακριά από την συχνότητα του διεγέρτη και έτσι το πλάτος της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος θα μειωθεί. Βλέπε σχετική γραφική παράσταση σχολικό

<u>ΘΕΜΑ 3^ο</u>

<u>Λύση</u>

Α.
Από την γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι ο φελλός αρχικά είναι ακίνητος, ταλαντώνεται με πλάτος 10cm ξεκινώντας από την χρονική στιγμή t=3 sec και την χρονική στιγμή t=5,5 sec ο φελλός σταματάει να κινείται. Γνωρίζοντας ότι έχουμε δύο πηγές κυμάτων τότε το μόνο λογικό συμπέρασμα που μπορούμε να καταλήξουμε είναι το ότι στην αρχή ο φελλός ηρεμούσε γιατί κανένα κύμα δεν είχε φτάσει στον φελλό. Από την t = 3sec μέχρι την t = 5,5 sec ο φελλός ταλαντώνεται μόνο λόγω της πηγής 1 που βρίσκεται πιο κοντά του. Μετά την χρονική στιγμή t = 5,5 sec φτάνει στον φελλό και το δεύτερο κύμα (από την πηγή 2) και συμβάλλει καταστρεπτικά με το κύμα της

πηγής 1. Όσο κι αν αυτό φαίνεται περίεργο η γραφική παράσταση που μας δίνεται είναι συμβολής. Αν την παρατηρήσουμε λίγο καλύτερα θα δούμε ότι η περίοδος ταλάντωση του φελλού άρα και η περίοδος ταλάντωσης του κύματος είναι *T = 1 sec*. Με βάση λοιπόν τα παραπάνω έχουμε:

$$y = \left\{ \begin{matrix} 0 & \alpha\nu\, t \le 3\sec \\ 10\eta\mu 2\pi t & \alpha\nu\, 3\sec < t \le 5{,}5\sec \\ 0 & \alpha\nu\, t > 5{,}5\sec \end{matrix} \right\} (cm)$$

Εναλλακτικά η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί:

$$y = \left\{ \begin{matrix} 10\eta\mu 2\pi (t-3) & \alpha\nu\, 3\sec < t \le 5{,}5\sec \\ 0 & \alpha\nu\, t > 5{,}5\sec \end{matrix} \right\} (cm)$$

αρκεί βέβαια να θυμηθούμε ότι αρνητική φάση σημαίνει ότι το κύμα δεν έχει φτάσει ακόμα στο δεδομένο σημείο συνεπώς η απομάκρυνσή του είναι συνεχώς μηδέν.

Β.

Αν παρατηρήσουμε ακόμη καλύτερα την γραφική παράσταση θα δούμε ότι το κύμα φτάνει από την πρώτη πηγή στον φελλό σε 3sec δηλαδή σε χρόνο 3Τ. Σύμφωνα με τον ορισμό του μήκους κύματος, ως η απόσταση που διανύει το κύμα σε χρόνο μιας περιόδου, η απόσταση μεταξύ του φελλού και της πηγής 1 είναι 3λ. Με την ίδια λογική καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η απόσταση του φελλού από την δεύτερη είναι 5,5λ.

Επειδή μετά την συμβολή ο φελλός παραμένει ακίνητος, βρίσκεται σε θέση αποσβεστικής συμβολής. Άρα θα πρέπει να ισχύει: $r_2 - r_1 = (2\kappa+1)\dfrac{\lambda}{2}$. Είναι λοιπόν:

$$5{,}5\lambda - 3\lambda = (2\kappa+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2{,}5 = (2\kappa+1)\frac{1}{2} \Rightarrow 5 = 2\kappa + 1 \Rightarrow$$

$$4 = 2\kappa \Rightarrow \boxed{\kappa = 2}$$

Δηλαδή ο φελλός βρίσκεται στο τρίτο κατά σειρά σημείο αποσβεστικής συμβολής πάνω στην ευθεία. Άρα υπάρχουν άλλα δύο σημεία που παραμένουν συνεχώς ακίνητα.

Γ.

Αφού η ταχύτητα διάδοσης είναι c = 5m/s, τότε μπορούμε πολύ εύκολα να βρούμε το μήκος κύματος:

$$c = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{5}{1} \Rightarrow \boxed{\lambda = 5m}$$

Έτσι η απόσταση του φελλού από την πρώτη πηγή είναι 3λ δηλαδή 15m, ενώ η απόσταση του φελλού από την δεύτερη είναι 5,5λ δηλαδή 27,5m.

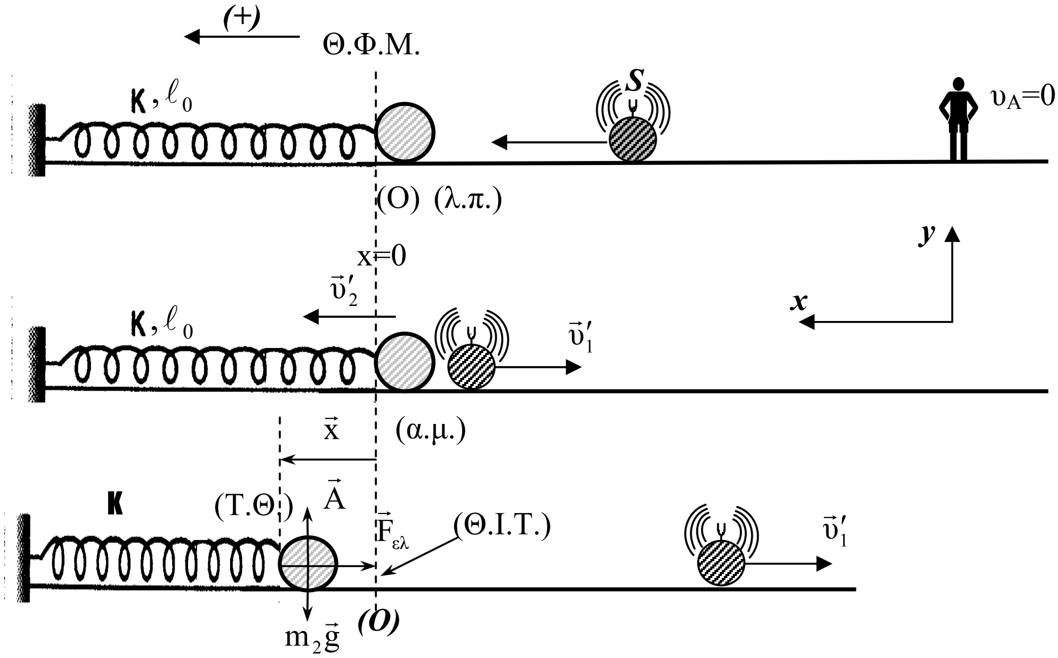
Δ.

Για τις εξισώσεις έχουμε:

$$y = 0{,}05\eta\mu 2\pi\left(t - \frac{x}{5}\right) (SI)$$

ΘΕΜΑ 4º

ΛΥΣΗ



Α) Για το μέτρο υ_1 της ταχύτητας του σώματος μάζας m_1 έχουμε

$$\left.\begin{array}{l}\textit{εξίσωση Doppler για πηγή που}\\ \textit{απομακρύνεται από ακίνητο}\\ \textit{παρατηρητή}\end{array}\right\} \rightarrow f_A = f_S \cdot \frac{\upsilon}{\upsilon+\upsilon_s} \overset{(\upsilon_s=\upsilon_1)}{\Longrightarrow} f_A = \frac{f_S \cdot \upsilon}{\upsilon+\upsilon_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_A \cdot \upsilon + f_A \cdot \upsilon_1 = f_S \cdot \upsilon \Rightarrow f_A \cdot \upsilon_1 = (f_S - f_A) \cdot \upsilon \Rightarrow \boxed{\upsilon_1 = \frac{f_S - f_A}{f_A} \cdot \upsilon} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_1 = 340 \cdot \frac{1800-1700}{1700} \frac{m}{s} \Rightarrow \underline{\underline{\upsilon_1 = \upsilon_s = 20\frac{m}{s}}} \ .$$

Β) Αφού μετά την κρούση για τη συχνότητα f_A' που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής *Α* ισχύει η ανίσωση $f_A' > f_S$ (πηγή πλησιάζει σε ακίνητο παρατηρητή), συμπεραίνουμε ότι το σώμα μάζας m_1 θα κινείται προς αυτόν. Οπότε, για την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος μάζας m_1 μετά την κρούση ισχύει

$$\upsilon_1' = \upsilon_S' = -\frac{\upsilon_1}{2} \qquad (1)\ .$$

Σύμφωνα με την Αρχή Διατήρησης της Ορμής και τη Διατήρηση της Κινητικής Ενέργειας, για τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των δύο σωμάτων μετά τη μετωπική και ελαστική τους κρούση ($\upsilon_2 = 0$) ισχύουν οι εξισώσεις

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \upsilon_1 \quad (2) \qquad \text{και} \qquad \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot \upsilon_1 \quad (3) .$$

i) Για το λόγο $\frac{m_1}{m_2}$ έχουμε:

$$(2) \overset{(1)}{\Rightarrow} -\frac{\upsilon_1}{2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \Rightarrow -m_1 - m_2 = 2m_1 - 2m_2 \Rightarrow -3m_1 = -m_2 \Rightarrow \underline{\underline{\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}}} \quad (4).$$

ii) Για την ταχύτητα του σώματος μάζας m_2 αμέσως μετά την κρούση έχουμε:

$$(3) \overset{(4)}{\Rightarrow} \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + 3m_1} \cdot \upsilon_1 = \frac{2m_1}{4m_1}\upsilon_1 \Rightarrow \underline{\underline{\upsilon_2' = \frac{\upsilon_1}{2} = 10\frac{m}{s}}} \ .$$

Γ) i) Στην τυχαία θέση της κίνησης του σώματος μάζας m_2 μετά την κρούση και με θετική φορά αυτήν της απομάκρυνσης $\vec{x}$ έχουμε

$$\Sigma F_x = -F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow \Sigma F_x = -k \cdot x = -D \cdot x \ .$$

<u>Επομένως, το σώμα μάζας m_2 μετά την κρούση εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερή επαναφοράς $D = k$</u> .

ii) Οι εξισώσεις απομάκρυνσης και ταχύτητας για την απλή αρμονική ταλάντωση που εκτελεί το σώμα μάζας m_2 μετά την κρούση είναι γενικά οι εξής:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0) \qquad (5)$$
$$V = V_{\max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0) \quad (6).$$

Επομένως, για τη γραφή της εξίσωσης της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, πρέπει να προσδιορίσουμε τους ανεξάρτητους από το χρόνο όρους V_{max} , ω και ϕ_0 .

<u>Προσδιορισμός μέγιστης ταχύτητας </u>(V_{max}) :
Αφού η κρούση αρχίζει και τελειώνει στην ίδια θέση, που αποτελεί θέση ισορροπίας για το σώμα μάζας m_2 , η ταχύτητα υ_2' που έχει το σώμα αυτό αμέσως μετά την κρούση αποτελεί τη μέγιστη ταχύτητα της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί. Δηλαδή ισχύει $V_{\max} = \upsilon_2' = 10\frac{m}{s}$.

<u>Προσδιορισμός γωνιακής συχνότητας </u>(ω) :
Το μικρόφωνο *Β* θα ανιχνεύει δύο διαδοχικούς ήχους μέγιστης και ελάχιστης συχνότητας κατά τη διέλευση του σώματος μάζας m_2 από τη θέση ισορροπίας,

κινούμενο προς τα δεξιά (αρνητικά) και προς τα αριστερά (θετικά) αντίστοιχα ($f_{B_{\min(-)}^{\max(+)}} = f_S \cdot \dfrac{\upsilon \pm V_{\max}}{\upsilon + |\upsilon_S'|}$). Οπότε, το χρονικό διάστημα Δt που δίνεται θα αντιστοιχεί σε μισή περίοδο. Δηλαδή:

$$\Delta t = \frac{\mathrm{T}}{2} \Rightarrow \mathrm{T} = 2\Delta t = 2 \cdot 1s \Rightarrow \mathrm{T} = 2s \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \Rightarrow \omega = \pi \frac{r}{s} \; .$$

<u>Προσδιορισμός αρχικής φάσης</u> (ϕ_0) :

Ισχύει

$$t_0 = 0: \left.\begin{matrix} x = 0 \\ \upsilon = +V_{\max} \end{matrix}\right\} (\mathrm{A}\rho\chi\iota\kappa\acute{\epsilon}\varsigma \; \Sigma\upsilon\nu\theta\acute{\eta}\kappa\epsilon\varsigma).$$

Οπότε έχουμε

$$\left.\begin{matrix} (5) \overset{(\mathrm{A}\rho\chi.\,\Sigma\upsilon\nu\theta.)}{\Longrightarrow} 0 = A\eta\mu\phi_0 \\ (6) \overset{(\mathrm{A}\rho\chi.\,\Sigma\upsilon\nu\theta.)}{\Longrightarrow} +V_{\max} = V_{\max}\sigma\upsilon\nu\phi_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \eta\mu\phi_0 = 0 \\ \sigma\upsilon\nu\phi_0 = 1 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(0 \le \phi_0 < 2\pi)} \phi_0 = 0$$

Τελικά, για την εξίσωση της ταχύτητας στο S.I. έχουμε: $\boxed{V = 10\sigma\upsilon\nu(\pi t)}$ (8).

iii) Με εφαρμογή της εξίσωσης Doppler σε αυτήν την περίπτωση σχετικής κίνησης πηγής – παρατηρητή, για τη σχέση που συνδέει τη συχνότητα που καταγράφει το μικρόφωνο *B* με το χρόνο έχουμε

$$f_B = f_S \cdot \frac{\upsilon - V}{\upsilon + |\upsilon_S'|} \overset{(8)}{\Longrightarrow} f_B = 1800 \cdot \frac{340 - 10\sigma\upsilon\nu(\pi t)}{340 + 10} \Rightarrow f_B = \frac{1800 \cdot 340}{350} - \frac{1800 \cdot 10}{350} \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f_B = \frac{12240}{7} - \frac{360}{7} \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi t) \quad (t \to s\,,\, f_B \to Hz) \qquad (9)\,.$$