ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ 2013 ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)>0$ στο $(\alpha,x_o)\cup(x_o,\beta)$, τότε το $f(x_o)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f και η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Μονάδες 9

Β. α. Πότε το σημείο $A(x_o,f(x_o))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Μονάδες 3

β. Αν f,g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α, Β αντιστοίχως, τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g και ποιο είναι το πεδίο ορισμού της;

Μονάδες 3

Δ. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις επόμενες προτάσεις ως Σωστό (Σ) ή λανθασμένη (Λ):

α. Αν f',g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β] τότε, ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες γράφεται $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx-\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx=\left[f(x)g(x)\right]_\alpha^\beta$.

β. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|^\nu=|z^\nu|$, $\nu\in\mathbf{N}^*$.

γ. Κάθε συνάρτηση 1–1 είναι γνησίως μονότονη.

δ. Αν 0<α<1 τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_\alpha x=+\infty$.

ε. Για κάθε $\nu\in\mathbf{N}^*$ η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}^*$ με $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $\bar{z}(z+2)=-|1-i|^2\cdot z-3$ και w=2z–i.

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του $\bar{z}$;

Μονάδες 7

β. Να βρείτε την μέγιστη τιμή του $|z-\bar{z}|$ και τις τιμές του z για τις οποίες επιτυγχάνεται.

Μονάδες 6

γ. Αν για τους μιγαδικούς z των προηγούμενων ερωτημάτων ισχύει $|z-\bar{z}|=2$ και Im(z)>0, τότε να υπολογίσετε την τιμή του $\left(\frac{z-\bar{z}}{2}\right)^{2013}$.

Μονάδες 6

δ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w και να αποδείξετε ότι η απόσταση των εικόνων του z και w είναι ίση με την απόσταση της εικόνας του z από το σημείο Α(0,1).

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{e^x-1}, & x\neq 0 \\ \ln\alpha, & x=0 \end{cases}$.

Α. Να βρείτε τον $\alpha\in(0,+\infty)$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη και να δείξετε ότι $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$.

Μονάδες 7

Β. Για α=e:

α. να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία,

Μονάδες 6

β. να βρείτε το σύνολο τιμών και τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f, εφόσον υπάρχουν.

Μονάδες 6

Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x-\int_0^x \dfrac{1}{f(t)+1}dt=\dfrac{1}{2013}$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις f,G,F οι οποίες είναι ορισμένες στο διάστημα $[0,+\infty)$ με f παραγωγίσιμη και G δύο φορές παραγωγίσιμη στο ίδιο διάστημα. Έστω ότι ισχύουν $f(0)=1$, $G(0)=0$ και για κάθε $x\geq 0$ είναι $f'(x)>0$, $G'(x)>1$ και $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

Α. Να αποδείξετε ότι $F(x)\geq 0$ και $G(x)\geq x$ για κάθε $x\geq 0$.

Μονάδες 5

Β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}(F(x)\ln x)$ και να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)\ln\xi+\dfrac{F(\xi)}{\xi}=0$.

Μονάδες 7

Γ. Δίνεται επιπλέον ότι $f'(x)F(x)+f^2(x)=G''(x)[G(x)-x]+[G'(x)-1]^2$, για κάθε $x\geq 0$. Να αποδείξετε ότι:

α. $F(x)=G(x)-x$, για κάθε $x\geq 0$.

Μονάδες 7

β. για κάθε $x_o>0$, οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων C_F, C_G στα σημεία τους $B(x_o,F(x_o))$ και $\Gamma(x_o,G(x_o))$ αντιστοίχως, τέμνονται σε σημείο Α του άξονα y'y και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισεμβαδικό με το χωρίο, που ορίζεται από τις C_F, C_G και την ευθεία $x=x_o$.

Μονάδες 6