ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ Ι

1ο ΕΞΑΜΗΝΟ

Λορεντζιάδης

1. Δημιουργήστε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος:

$2x_1 + 3x_2 = 72$ ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 72 \\ 4 & 9 & 200 \end{array}\right)$

$4x_1 + 9x_2 = 200$

Η διάταξη αυτή ονομάζεται επαυξημένος πίνακας. Μετά τις κάθετες γραμμές αναγράφονται οι σταθεροί όροι.

2. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Gauss, βρείτε τη λύση του συστήματος

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 100$$
$$4x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 180$$
$$3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 160$$

Κατ' αρχάς γράφαμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 100 \\ 4 & 9 & 6 & 180 \\ 3 & 6 & 4 & 160 \end{array}\right) \rightarrow$ Επιλέξαμε το πάνω αριστερό στοιχείο (2) το οποίο και θα αποτελέσει το οδηγό στοιχείο...

Σκοπός μας είναι να γίνει απαλοιφή του x_1 στη 2η και 3η εξίσωση. Αυτό επιτυγχάνεται εάν:

- Κάθε αριθμό της 2ης εξίσωσης τον αφαιρέσουμε το γινόμενο του 2 επί τον αντίστοιχο αριθμό στήλης της 1ης εξίσωσης
- Κάθε αριθμό της 3ης εξίσωσης τον αφαιρέσουμε το γινόμενο του 3/2 επί τον αντίστοιχο αριθμό στήλης της 1ης εξίσωσης

↳ Βλέπουμε με το μάτι ποιοι αριθμοί μηδενίζουν το X_1.

Έτσι έχουμε:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 5 & 100 \\ 4-2\cdot 2 & 9-2\cdot 3 & 6-2\cdot 5 & 180-2\cdot 100 \\ 3-(3/2)2 & 6-(3/2)3 & 4-(3/2)5 & 160-(3/2)100 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 100 \\ 0 & 3 & -4 & -20 \\ 0 & 1{,}5 & -3{,}5 & 10 \end{array}\right)$$

Επιτύχαμε πράγματι ο άγνωστος x_1 να είναι μόνο στην 1η εξίσωση την οποία θα διατηρήσουμε για την ώρα αναλλοίωτη.

Επιλέγουμε το δεύτερο στοιχείο της δεύτερης σειράς ως το νέο οδηγό στοιχείο. Με το νέο οδηγό στοιχείο προσπαθούμε να απαλείψουμε το x_2 από την τρίτη εξίσωση. Αυτό επιτυγχάνεται αν:

- Πολλαπλασιάσουμε την οδηγό σειρά με 1/2 και την αφαιρέσουμε από την τρίτη σειρά.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 100 \\ 0 & 3 & -4 & -20 \\ 0 & 1{,}5-3\,1/2 & -3{,}5+4\,1/2 & 10+20\,1/2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 100 \\ 0 & 3 & -4 & -20 \\ 0 & 0 & -1{,}5 & 20 \end{array}\right)$$

Ο επαυξημένος πίνακας έχει αναχθεί σε κλιμακωτή μορφή ώστε κάτω από τη διαγώνιο βρίσκονται μόνο στοιχεία 0.

Επομένως:

- $-1{,}5x_3 = 20 \Leftrightarrow \boxed{x_3 = -13{,}33}$
- $3x_2 - 4(-13{,}33) = -20 \Leftrightarrow \boxed{x_2 = -24{,}44}$
- $2x_1 + 3(-24{,}44) + 5(-13{,}33) = 100 \Leftrightarrow \boxed{x_1 = 120}$

3. Να λυθεί με τη μέθοδο Gauss το σύστημα:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 35 \\ 5x_1 + 9x_2 &= 95 \\ 4x_1 + 6x_2 &= 70 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα αυτή τη φορά έχει $m=3$ εξισώσεις και $n=2$ αγνώστους. Επαυξημένος πίνακας:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 35 \\ 5 & 9 & 95 \\ 4 & 6 & 70 \end{array}\right)$$

Θέτουμε ως οδηγό στοιχείο το 2

- Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη σειρά με $\frac{5}{2}$ και αφαιρούμε το ποσό από τη δεύτερη σειρά. ■ Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη σειρά με 2 και αφαιρούμε το ποσό από την τρίτη σειρά.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 35 \\ 0 & 1{,}5 & 7{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$1{,}5x_2 = 7{,}5 \Leftrightarrow \boxed{x_2 = 5}$

$2x_1 + 3\cdot 5 = 35 \Leftrightarrow \boxed{x_1 = 10}$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Ένα πρόβλημα με $m=3$ εξισώσεις και $n=2$ αγνώστους είναι πιθανό να μην έχει λύση.

4. Να λυθεί με τη μέθοδο Gauss το προηγούμενο σύστημα όταν ο σταθερός όρος της τρίτης εξίσωσης είναι 72 αντί 70.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 35 \\ 5x_1 + 9x_2 = 95 \\ 4x_1 + 6x_2 = 72 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 35 \\ 3 & 9 & 75 \\ 4 & 6 & 72 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{ομοίως με πριν}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 35 \\ 0 & 1,5 & 7,5 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Διαπιστώνουμε αμέσως ότι η τρίτη εξίσωση είναι αδύνατη. Επομένως το σύστημα δεν έχει λύση.

5. Να λυθεί με τη μέθοδο Gauss το σύστημα:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 48 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 60 \\ 5x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 90 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 8 & 48 \\ 2-3\frac{2}{3} & 4-2\frac{2}{3} & 4-8\frac{2}{3} & 60 \\ 5-3\frac{5}{3} & 3-2\frac{5}{3} & 9-8\frac{5}{3} & 90 \end{array}\right)$$

• Κάθε αριθμό της 2ης εξίσωσης του αφαιρούμε το γινόμενο του 2/3 επί τον αντίστοιχο αριθμό στήλης της 1ης εξίσωσης

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 8 & 48 \\ 0 & 8/3 & -4/3 & 28 \\ 0 & -1/3 & -13/3 & 10 \end{array}\right)$$

• Κάθε αριθμό της 3ης εξίσωσης του αφαιρούμε το γινόμενο του 5/3 επί τον αριθμό στήλης της 1ης εξίσωσης

• Κάθε αριθμό της 3ης εξίσωσης του αφαιρέσουμε το γινόμενο του $-1/8$ επί τον αντίστοιχο αριθμό στήλης της 2ης εξίσωσης.

Το $-1/8$ προκύπτει: $-\frac{1}{3} - \frac{8}{3}x = 0 \Rightarrow x = -1/8$

Αφού θέλουμε να μηδενίσουμε το $-1/3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 8 & 48 \\ 0 & 8/3 & -4/3 & 28 \\ 0 & 0 & -4,5 & 13,5 \end{array}\right)$$

* $-4,5x_3 = 13,5 \rightarrow x_3 = \frac{13,5}{-4,5}$ $\boxed{x_3 = -3}$

* $\frac{8}{3}x_2 = 28 + \frac{4}{3}(-3)$ $\boxed{x_2 = 9}$

* $3x_1 = 48 - 2 \cdot 9 - 8(-3) \leftrightarrow$ $\boxed{x_1 = 18}$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Πρώτα προσπαθούμε να μηδενίσουμε το X_1 της 2ης και 3ης εξίσωσης.

• Σε πρώτη φάση, κάθε αριθμό της 2ης εξίσωσης του αφαιρούμε το γινόμενο του αντίστοιχου αριθμού στήλης της 1ης εξίσωσης επί τον αριθμό που μηδενίζει το X_1 της 2ης εξίσωσης.

• Ύστερα κάθε αριθμό της 3ης εξίσωσης του αφαιρούμε το γινόμενο του αντίστοιχου αριθμού στήλης της 1ης εξίσωσης επί τον αριθμό που μηδενίζει το X_1 της 3ης εξίσωσης.

Δεύτερον, θέλουμε να μηδενίσουμε το X_2 της 3ης εξίσωσης. Έτσι:

• Κάθε αριθμό της 3ης εξίσωσης του αφαιρούμε το γινόμενο του αντίστοιχου αριθμού στήλης της 2ης εξίσωσης επί τον αριθμό που μηδενίζει το X_2 της 3ης εξίσωσης.

6. Μια εταιρεία παράγει τρία προϊόντα με χαρακτηριστικά ως εξής:

Προϊόν	A	B	Γ
Κέρδος (€ ανά μονάδα)	3	5	7
Κόστος Α' υλών (€ ανά μονάδα)	5	4	9

- Η εταιρεία μπορεί να παράγει 10.000 μονάδες προϊόντος ανά εβδομάδα σε οποιονδήποτε συνδυασμό. $Q_1+Q_2+Q_3=10.000$
- Σκοπός του τμήματος παραγωγής είναι η πλήρης αξιοποίηση της παραγωγικής ικανότητας. Η εταιρεία δαπανά το ποσό των 60.000€ για την αγορά πρώτων υλών σε εβδομαδιαία βάση. $5Q_1+4Q_2+9Q_3=60.000$
- Βρείτε το πρόγραμμα παραγωγής που εξασφαλίζει συνολικό εβδομαδιαίο κέρδος 46.000€. $3Q_1+5Q_2+7Q_3=46.000$

ΛΥΣΗ GAUSS:

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα των τριών εξισώσεων:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10.000 \\ 5 & 4 & 9 & 60.000 \\ 3 & 5 & 7 & 46.000 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10000 \\ 0 & -1 & 4 & 10.000 \\ 0 & 2 & 4 & 16000 \end{array}\right)$$

- Αφαιρέσαμε από τη 2η σειρά το 5πλάσιο της πρώτης σειράς και από τη 3η σειρά το 3πλάσιο της πρώτης σειράς, στην προσπάθειά μας να μηδενίσουμε το x_1 της 2ης και 3ης εξίσωσης.
- Για να μηδενίσουμε το x_2 της 3ης εξίσωσης προσθέσαμε στην τρίτη σειρά το διπλάσιο της 2ης και προκύπτει ισοδύναμα:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10.000 \\ 0 & -1 & 4 & 10.000 \\ 0 & 0 & 12 & 36.000 \end{array}\right) \qquad 12Q_3=36000 \qquad \boxed{Q_3=3000}$$

$$-Q_2+4\cdot 3000=10.000 \Leftrightarrow \boxed{Q_2=2000}$$

$$Q_1+2000+3000=10.000 \Leftrightarrow \boxed{Q_1=5000}$$

7. Με εφαρμογή της μεθόδου Gauss-Jordan λύστε το σύστημα:

$$\begin{aligned} 2x_1+8x_2+6x_3&=36 \\ 4x_1+17x_2+6x_3&=40 \\ 3x_1+15x_2+4x_3&=50 \end{aligned} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 6 & 36 \\ 4 & 17 & 6 & 40 \\ 3 & 15 & 4 & 50 \end{array}\right)$$

Επιλέξαμε το 2 ως οδηγό στοιχείο. Στη μέθοδο Gauss-Jordan επιδιώκουμε το οδηγό στοιχείο να είναι 1. Αυτό επιτυγχάνεται διαιρώντας την πρώτη σειρά με το 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 18 \\ 4 & 17 & 6 & 40 \\ 3 & 15 & 4 & 50 \end{array}\right)$$

Συμπεραίνουμε ότι στη μέθοδο Gauss το οδηγός-στοιχείο διατηρεί την τιμή του.

Στη συνέχεια απαλείφουμε το x_1 από τη 2η και 3η εξίσωση.

- αφαιρούμε από τη 2η σειρά το τετραπλάσιο της 1ης
- αφαιρούμε από τη 3η σειρά το τριπλάσιο της 1ης

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 18 \\ 4-4\cdot 1 & 17-4\cdot 4 & 6-4\cdot 3 & 40-4\cdot 18 \\ 3-3\cdot 1 & 15-3\cdot 4 & 4-3\cdot 3 & 50-3\cdot 18 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 18 \\ 0 & 1 & -6 & -32 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \end{array}\right)$$

Οδηγό στοιχείο γίνεται τώρα το δεύτερο στοιχείο της διαγωνίου. Είναι ήδη 1, επομένως δεν απαιτείται διαίρεση της σειράς για να μετατραπεί σε 1.

Εν συνεχεία επιδιώκαμε την πλήρη απαλοιφή του x_2 από όλες τις εξισώσεις του συστήματος με εξαίρεση τη δεύτερη με το οδηγό στοιχείο.

- Αφαιρούμε από την 1η σειρά το τετραπλάσιο της 2ης σειράς
- Αφαιρούμε από την 3η σειρά το τριπλάσιο της 2ης σειράς.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-0 & 4-4\cdot 1 & 3-4(-6) & 18-4(-32) \\ 0 & 1 & -6 & -32 \\ 0-0 & 3-3\cdot 1 & -5-3(-6) & -4-3(-32) \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 27 & 146 \\ 0 & 1 & -6 & -32 \\ 0 & 0 & 13 & 92 \end{array}\right)$$

Οδηγό στοιχείο γίνεται το τρίτο στοιχείο της διαγωνίου. Διαιρούμε την 3η σειρά με το 13 καθώς απαιτείται να είναι 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 27 & 146 \\ 0 & 1 & -6 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 92/13 \end{array}\right)$$

Προχωρούμε τώρα στην απαλοιφή του x_3 από τη 1η και τη 2η εξίσωση.

- Πολλαπλασιάζουμε την 3η σειρά με 27 και την αφαιρούμε από την 1η σειρά.
- Προσθέτουμε το εξαπλάσιο της 3ης σειράς στη 2η σειρά.

Προκύπτει:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -45,077 \\ 0 & 1 & 0 & 10,461 \\ 0 & 0 & 1 & 7,077 \end{array}\right)$$

Ο επαυξημένος πίνακας έχει πλέον αναχθεί σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, όπου όλα τα στοιχεία στη διαγώνιο των συντελεστών είναι 1 ενώ τα στοιχεία εκτός διαγωνίου είναι 0. Η λύση του συστήματος είναι τώρα άμεση: $x_1=-45,077$ $x_2=10,461$ $x_3=7,077$

8. Με τη μέθοδο Gauss-Jordan λύστε το παρακάτω σύστημα.

$$\begin{cases} x+y+z+w=2 \\ 2x+3y+4z+5w=7 \\ 3x+2y+3z+4w=5 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

Διαδοχικά προχωράμε με τη μέθοδο Gauss-Jordan:

- Αφαιρούμε από τη 2η σειρά το διπλάσιο της 1ης
- Αφαιρούμε από τη 3η σειρά το τριπλάσιο της 1ης

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

- Πολλαπλασιάζουμε με −1 τη 3η σειρά και αναμεταθέτουμε την 3η και τη 2η

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

• Αφαιρούμε από τη $1^η$ σειρά τη $2^η$ και από την $3^η$ σειρά, τη $2^η$ σειρά.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

• Διαιρούμε με το 2 την $3^η$ σειρά:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

• Αφαιρούμε από την $1^η$ σειρά την $3^η$ σειρά:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ y-w=1 \\ z+2w=1 \end{array}$$

Επομένως:

$x=0$

$y=1+t$

$z=1-2t$

$w=t$

→ Η παράμετρος t μπορεί να λαμβάνει οποιαδήποτε τιμή. Ουσιαστικά δεν έχουμε μοναδική λύση αλλά άπειρες λύσεις οι οποίες ικανοποιούν το σύστημα.

9. Μια επενδυτική εταιρεία ενδιαφέρεται να επενδύσει το ποσό των 270.000€ αγοράζοντας μετοχές τριών εταιρειών Α, Β και Γ. Η τιμή της μετοχής για κάθε εταιρεία καθώς και το μέρισμα που αποδίδει (μέρισμα προηγούμενης χρήσης) είναι ως εξής:

	Τιμή (€)	Μέρισμα (€)
Εταιρεία Α	80	4
Εταιρεία Β	50	3
Εταιρεία Γ	60	5

Η επενδυτική εταιρεία επιθυμεί να λάβει συνολικό ποσό από μερίσματα 17.500. Ποιός είναι ο αριθμός μετοχών από κάθε εταιρεία που θα αγοραστούν; Προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\begin{array}{l} 4x_A + 3x_B + 5x_Γ = 17.500 \\ 80x_A + 50x_B + 60x_Γ = 270.000 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 5 & 17.500 \\ 80 & 50 & 60 & 270.000 \end{array}\right)$$

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Gauss-Jordan:

• Διαιρούμε την $1^η$ σειρά με 4

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}75 & 1{,}25 & 4375 \\ 80 & 50 & 60 & 270.000 \end{array}\right)$$

• Πολλαπλασιάζουμε την $1^η$ σειρά με 80 και την αφαιρούμε από τη $2^η$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}75 & 1{,}25 & 4375 \\ 0 & -10 & -40 & -80.000 \end{array}\right)$$

• Διαιρούμε τη 2η σειρά με -10

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,75 & 1,25 & 4375 \\ 0 & 1 & 4 & 8000 \end{array}\right)$$

• Τέλος, πολλαπλασιάζουμε τη 2η σειρά με 0,75 και την αφαιρούμε από τη 1η

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1,75 & -1625 \\ 0 & 1 & 4 & 8000 \end{array}\right)$$

Προκύπτει ότι:

$$\left.\begin{array}{l} X_A = -1625 + 1,75t \\ X_B = 8000 - 4t \\ X_\Gamma = t \end{array}\right\} \rightarrow$$ Όπου το t μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή.

Εάν η επενδυτική εταιρεία υποχρεώνεται να αγοράσει τις μετοχές χωρίς να μπορεί να τις χρωστάει, θα πρέπει να ισχύει:

$X_A \geq 0 \quad X_B \geq 0 \quad X_\Gamma \geq 0$

• Από $X_A \geq 0$ προκύπτει $t \geq 928,57$

• Επίσης $X_B \geq 0$ συνεπάγεται $t \leq 2000$

• Τέλος $X_\Gamma \geq 0$ σημαίνει $t \geq 0$

Συνοψίζοντας, η παράμετρος t λαμβάνει τιμές ώστε:

$928,57 \leq t \leq 2000$

10. Τι ονομάζουμε βαθμό ενός συστήματος;

Ο αριθμός των 1 στη διαγώνιο του επαυξημένου πίνακα, όταν αυτή ανάγεται στην τελική μορφή της Gauss-Jordan, ονομάζεται βαθμός (rank) του συστήματος.

11. Βρείτε τη λύση με τη μέθοδο Gauss-Jordan και υπολογίστε το βαθμό για τα παρακάτω συστήματα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

Α)
$$\begin{array}{l} x + y + z = 10 \\ 2x + 3y + 4z = 27 \\ 3x + 2y + 2z = 25 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 27 \\ 3 & 2 & 2 & 25 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Προκύπτει: $x=5 \quad y=3 \quad z=2$

Μετρώντας τα 1 προκύπτει ότι ο βαθμός του συστήματος είναι 3.

Β)
$$\begin{array}{l} x + y + z = 10 \\ 2x + 3y + 4z = 27 \\ 3x + 2y + z = 23 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 27 \\ 3 & 2 & 1 & 23 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Προκύπτει:

$x=3+t \quad y=7-2t \quad z=t$

Ο βαθμός του συστήματος είναι 2.

Γ) $x+y+z=10$
$2x+3y+4z=27$
$3x+2y+z=24$
$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 27 \\ 3 & 2 & 1 & 24 \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Το σύστημα είναι αδύνατο! Ο βαθμός του είναι 2.

12. Κανόνας 1

Για ένα γραμμικό σύστημα $m=n$ εξισώσεις και αγνώστους, ισχύει:

- εάν ο βαθμός του συστήματος είναι $m=n$, τότε το σύστηματος έχει μια μοναδική λύση.
- εάν ο βαθμός του συστήματος είναι μικρότερος από $m=n$, τότε το σύστημα έχει είτε άπειρες είτε καμία λύση, και αυτό καθορίζεται από τους σταθερούς όρους (δεξί μέλος).

13. Βρείτε τη λύση με τη μέθοδο Gauss-Jordan και υπολογίστε το βαθμό για τα παρακάτω συστήματα δύο εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

Α) $x+y+z=10$
$2x+3y+4z=22$
$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 22 \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$

Προκύπτει ότι ο βαθμός του συστήματος είναι 2 και έχουμε άπειρες λύσεις: $x=8+t$, $y=2-2t$, $z=t$ όπου η παράμετρος t λαμβάνει οποιαδήποτε τιμές.

Β) $x+y+z=10$
$2x+2y+2z=21$
$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 2 & 2 & 21 \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Προκύπτει ότι ο βαθμός του συστήματος είναι 1 και το σύστημα είναι αδύνατο.

14. Κανόνας 2

Για ένα γραμμικό σύστημα με $m<n$, δηλαδή λιγότερες εξισώσεις από αγνώστους ισχύει ότι:

- εάν ο βαθμός του συστήματος είναι m, τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.
- εάν ο βαθμός του συστήματος είναι μικρότερος από m, τότε το σύστημα έχει είτε άπειρες είτε καμία λύση, και αυτό καθορίζεται από τους σταθερούς όρους (δεξί μέλος).

15. Βρείτε τη λύση με τη μέθοδο Gauss-Jordan και υπολογίστε το βαθμό για τα παρακάτω συστήματα τριών εξισώσεων με δύο αγνώστους.

A)
$$\begin{array}{l} x+y=10 \\ 2x+3y=22 \\ 2x+2y=20 \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 22 \\ 2 & 2 & 20 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to x=8 \quad y=2$$

Ο βαθμός είναι 2.

B)
$$\begin{array}{l} x+y=10 \\ 2x+3y=22 \\ 2x+2y=23 \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 22 \\ 2 & 2 & 23 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Το σύστημα είναι αδύνατο.
Ο βαθμός του συστήματος είναι 2

Γ)
$$\begin{array}{l} x+y=10 \\ 2x+2y=20 \\ 3x+3y=30 \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 10 \\ 2 & 2 & 20 \\ 3 & 3 & 30 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Επομένως $x=10-t \quad y=t$

Όπου η παράμετρος t λαμβάνει οποιαδήποτε τιμή.
Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και ο βαθμός του είναι 1.

Δ)
$$\begin{array}{l} x+y=10 \\ 2x+2y=21 \\ 3x+3y=30 \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 10 \\ 2 & 2 & 21 \\ 3 & 3 & 30 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Αδύνατο σύστημα. Ο βαθμός του είναι 1

16. Κανόνας 3.

Για ένα γραμμικό σύστημα με $m>n$, δηλαδή περισσότερες εξισώσεις από αγνώστους ισχύει ότι:
- εάν ο βαθμός του συστήματος είναι n, τότε το σύστημα έχει είτε μια μοναδική λύση είτε άπειρες λύσεις* και αυτό καθορίζεται από τους σταθερούς όρους.
- εάν ο βαθμός του συστήματος είναι μικρότερος από n, τότε το σύστημα έχει είτε άπειρες είτε καμία λύση, και αυτό καθορίζεται από τους σταθερούς όρους.

* είτε καμία λύση

17. Για δύο προϊόντα Α και Β ισχύει ότι η συνάρτηση ζήτησης και προσφοράς είναι αντίστοιχα:

Σ. ζήτησης προϊόντος Α: $Q_A = 18 - 3P_A + 5P_B$

Σ. ζήτησης προϊόντος Β: $Q_B = 80 - 8P_B + 4P_A$

Σ. προσφοράς προϊόντος Α: $P_A = 5 + 0{,}8Q_A + 0{,}4Q_B$

Σ. προσφοράς προϊόντος Β: $P_B = 3 + 0{,}75Q_B + 0{,}3Q_A$

→ Να βρεθούν οι τιμές των P_A, P_B, Q_A, Q_B στο σημείο ισορροπίας, με τη μέθοδο Gauss-Jordan. Επιλύουμε το σύστημα:

$$
\begin{aligned}
0{,}8Q_A + 0{,}4Q_B - 1P_A + 0P_B &= -5\\
0{,}3Q_A + 0{,}75Q_B + 0P_A - 1P_B &= -3\\
1Q_A + 0Q_B + 3P_A - 5P_B &= 18\\
0Q_A + 1Q_B - 4P_A + 8P_B &= 80
\end{aligned}
$$

Αντιμεταθέτουμε χάριν ευκολίας

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα:

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 3 & -5 & 18\\
0{,}3 & 0{,}75 & 0 & -1 & -3\\
0{,}8 & 0{,}4 & -1 & 0 & -5\\
0 & 1 & -4 & 8 & 80
\end{array}\right)
\rightarrow
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 3 & -5 & 18\\
0 & 0{,}75 & -0{,}9 & 0{,}5 & -8{,}4\\
0 & 0{,}4 & -3{,}4 & 4 & -19{,}4\\
0 & 1 & -4 & 8 & 80
\end{array}\right)
$$

$$
\rightarrow
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 3 & -5 & 18\\
0 & 1 & -1{,}2 & 0{,}667 & -11{,}2\\
0 & 0{,}4 & -3{,}4 & 4 & -19{,}4\\
0 & 1 & -4 & 8 & 80
\end{array}\right)
$$

Διαιρέσαμε τη 2η σειρά με 0,75 ώστε να βγει το νέο οδηγό στοιχείο.

Απαλοίφαμε το Q_B από την 3η και 4η σειρά αφαιρώντας από την αντίστοιχη σειρά κατάλληλο πολλαπλάσιο της δεύτερης σειράς (οδηγό στοιχείο). Μετά πάμε στο τρίτο οδηγό στοιχείο (-2,92) και το μετατρέπουμε σε 1

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 3 & -5 & 18\\
0 & 1 & -1{,}2 & 0{,}667 & -11{,}2\\
0 & 0 & -2{,}92 & 3{,}733 & -14{,}92\\
0 & 0 & -2{,}8 & 7{,}33 & 91{,}2
\end{array}\right)
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 3 & -5 & 18\\
0 & 1 & -1{,}2 & 0{,}667 & -11{,}2\\
0 & 0 & 1 & -1{,}279 & 5{,}11\\
0 & 0 & -2{,}8 & 7{,}33 & 91{,}2
\end{array}\right)
\xrightarrow{\text{Απαλοιφή του } P_A}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & -1{,}164 & 2{,}671\\
0 & 1 & 0 & -0{,}868 & -5{,}068\\
0 & 0 & 1 & -1{,}279 & 5{,}11\\
0 & 0 & 0 & 3{,}753 & 105{,}507
\end{array}\right)
$$

Μετατρέπουμε και το τελευταίο οδηγό στοιχείο σε 1 διαιρώντας με 3,753

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & -1{,}164 & 2{,}671\\
0 & 1 & 0 & -0{,}868 & -5{,}068\\
0 & 0 & 1 & -1{,}279 & 5{,}11\\
0 & 0 & 0 & 1 & 28{,}109
\end{array}\right)
\xrightarrow{\text{Απαλοιφή του } P_B}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 35{,}401\\
0 & 1 & 0 & 0 & 19{,}319\\
0 & 0 & 1 & 0 & 41{,}049\\
0 & 0 & 0 & 1 & 28{,}109
\end{array}\right)
$$

Συνεπώς το σημείο ισορροπίας της αγοράς είναι:

$Q_A = 35{,}401$ $P_A = 41{,}049$

$Q_B = 19{,}319$ $P_B = 28{,}109$

18. Πότε δύο πίνακες είναι ίσοι;

Δυο πίνακες είναι ίσοι μόνο όταν όλα τα στοιχεία που βρίσκονται στην ίδια θέση είναι ίσα.

19. Κατηγορίες (ειδικές) τετραγωνικών ($m \times m$) πινάκων

- Διαγώνιος Πίνακας: $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$
- Άνω τριγωνικός πίνακας: $\begin{pmatrix} 2 & -9 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ ← Αντίστροφα είναι ο κάτω τριγωνικός
- Συμμετρικός πίνακας $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 \\ -3 & 0 & 5 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ Ισχύει $a_{ij} = a_{ji}$

20. Προσθέστε τους πίνακες R και Q

$$R + Q = \begin{pmatrix} 12 & 19 & 6 \\ 7 & 3 & 8 \\ 3 & 7 & 11 \\ 0 & 19 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 \\ 8 & 2 & 7 \\ 4 & 6 & 18 \\ 0 & 20 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 39 & 11 \\ 15 & 5 & 15 \\ 7 & 13 & 29 \\ 0 & 39 & 25 \end{pmatrix}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: $\underset{\text{ΣΕΙΡΕΣ}}{m} \times \underset{\text{ΣΤΗΛΕΣ}}{n}$

21. Πολλαπλασιασμός σε πίνακα

$$5\begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 6 & 2 & 10 \\ 3 & 0 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot5 & -3\cdot5 & 6\cdot5 \\ 6\cdot5 & 2\cdot5 & 10\cdot5 \\ 3\cdot5 & 0\cdot5 & -9\cdot5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -15 & 30 \\ 30 & 10 & 50 \\ 15 & 0 & -40 \end{pmatrix}$$

Ο πολλαπλασιασμός με βαθμωτό μέγεθος λ γίνεται πολλαπλασιάζοντας κάθε στοιχείο του πίνακα με το λ.

22. Πολλαπλασιασμός δύο πινάκων

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο πίνακες A και B πρέπει οι διαστάσεις τους να είναι συμβατές. Πρέπει η διάσταση του πίνακα A να είναι $m \times n$ και η διάσταση του B $n \times k$

Ο πίνακας AB έχει διάσταση $m \times k$

$$n\times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{10}{(1\cdot2+2\cdot4)} & \overset{6}{(1\cdot0+2\cdot3)} & \overset{17}{(1\cdot5+2\cdot6)} \\ \underset{22}{(3\cdot2+4\cdot4)} & \underset{12}{(3\cdot0+4\cdot3)} & \underset{39}{(3\cdot5+4\cdot6)} \end{pmatrix}$$

23. Για τους πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ βρείτε το γινόμενο AB και BA.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1\cdot(-1)+2\cdot0] & (1\cdot2+2\cdot1) \\ [3\cdot(-1)+4\cdot0] & (3\cdot2+4\cdot1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1\cdot1+2\cdot3) & (-1\cdot2+2\cdot4) \\ (0\cdot1+1\cdot3) & (0\cdot2+1\cdot4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Διαπιστώνουμε ότι $AB \neq BA$

24. Υπολογίστε το γινόμενο $(10\ 4\ 6\ 7)\begin{pmatrix}3\\2\\6\\8\end{pmatrix}$.

$$(10\ 4\ 6\ 7)\begin{pmatrix}3\\2\\6\\8\end{pmatrix} = 10\cdot3+4\cdot2+6\cdot6+7\cdot8=130$$

25. Υπολογίστε το γινόμενο $(2\ 1\ 2\ 3)\begin{pmatrix}10 & 20 & 5\\8 & 2 & 7\\4 & 6 & 18\\0 & 20 & 15\end{pmatrix}$

$$=(2\cdot10+1\cdot8+2\cdot4+3\cdot0)(2\cdot20+1\cdot2+2\cdot6+3\cdot20)(2\cdot5+1\cdot7+2\cdot18+3\cdot15)$$
$$=(36\ \ 114\ \ 98)$$

26. Υπολογίστε το γινόμενο:

$$\begin{pmatrix}10 & 20 & 5\\8 & 2 & 7\\4 & 6 & 18\\0 & 20 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot10+4\cdot20+6\cdot5\\5\cdot8+4\cdot2+6\cdot7\\5\cdot4+4\cdot6+18\cdot6\\5\cdot0+4\cdot20+6\cdot15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}160\\90\\152\\170\end{pmatrix}$$

27. Ανάστροφος πίνακας

Ο ανάστροφος πίνακας του πίνακα A (A^T) είναι αυτός ο οποίος έχει ως σειρές τις στήλες του A και ως στήλες, τις σειρές του A.

π.χ.
$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\4 & 3\\6 & 4\end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix}1 & 4 & 6\\2 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

28. Κανόνες

- Αν ο πίνακας A είναι συμμετρικός τότε $A=A^T$
- Ισχύει $(A+B)^T=A^T+B^T$
- Ισχύει $(AB)^T=B^TA^T$
- Ανάστροφος πίνακας του ανάστροφου: $(A^T)^T=A$

29. Τι ορίζουμε ως ταυτοτικό ή μοναδιαίο πίνακα; (I_n)

Είναι ένας τετραγωνικός πίνακας διάστασης $n\times n$ με:

- όλα τα στοιχεία της πάνω αριστερά διαγωνίου είναι 1
- όλα τα στοιχεία εκτός διαγωνίου είναι 0

π.χ. $I_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Ο ταυτοτικός πίνακας I_n είναι αντίστοιχος του μοναδιαίου στοιχείου στον πολλαπλασιασμό.

ΚΑΝΟΝΑΣ: Έστω πίνακας A διαστάσεων $m\times n$.
Ισχύει $A\cdot I_n=A$ και $A\cdot I_n=I_n\cdot A=A$

30. Τι ονομάζουμε αντίστροφο πίνακα; (A^{-1})

Για ένα πίνακα A διάστασης $m\times n$:

- Ο πίνακας L διάστασης $n\times m$ είναι αριστερά αντίστροφος εάν: $LA=I_n$
- Ο πίνακας R διάστασης $n\times m$ είναι δεξιά αντίστροφος εάν: $AR=I_m$

31. Υπολογίστε τον αντίστροφο του πίνακα $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$

Για τον αντίστροφο του πίνακα A αναζητούμε αριθμούς α, β, γ, δ με: $A^{-1}=\begin{pmatrix}a&b\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$ και $AA^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\\gamma&\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Κάνοντας τις πράξεις: $\begin{pmatrix}a&b\\2a+\gamma&2b+\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Επομένως: $\boxed{a=1}$ $\boxed{b=0}$ $\boxed{\gamma=-2}$ $\boxed{\delta=1}$

Προκύπτει: $A^{-1}=\begin{pmatrix}a&b\\\gamma&\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}$

32. Κανόνες

- Εάν ένας τετραγωνικός πίνακας A δεν έχει αντίστροφο, τότε λέγεται ιδιάζων πίνακας ή μη αντιστρέψιμος. Τότε $\det(A)=0$
- Ο αντίστροφος του ανάστροφου πίνακα είναι ο ανάστροφος του αντιστρόφου: $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$
- Ο αντίστροφος του αντιστρόφου είναι ο αρχικός πίνακας: $(A^{-1})^{-1}=A$
- Ισχύει $(AB)^{-1}=(B^{-1})(A^{-1})$

→ Προϋπόθεση των ιδιοτήτων αυτών είναι οι πίνακες που θεωρούμε να είναι μη ιδιάζοντες.

33. Διερευνείστε εάν υπάρχει ο αντίστροφος του πίνακα $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$

Κανόνες:

- Εάν μια σειρά/στήλη ενός πίνακα είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων σειρών/στηλών του πίνακα, τότε ο πίνακας είναι ιδιάζων, δηλαδή μη αντιστρέψιμος.
- Εάν οι σειρές/στήλες ενός πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες τότε ο πίνακας ΕΙΝΑΙ αντιστρέψιμος.

→ Στον πίνακα A η δεύτερη σειρά είναι το διπλάσιο της πρώτης, και συνεπώς συμπεραίνουμε ότι οι σειρές του πίνακα είναι γραμμικά εξαρτημένες. Έπεται ότι ο πίνακας A είναι ΜΗ αντιστρέψιμος.

34. Κανόνες:

- Ο βαθμός ενός πίνακα A ($r(A)$) μας δείχνει το πλήθος (μέγιστο αριθμό) των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του A.
- Ένας τετραγωνικός πίνακας διάστασης $n\times n$ είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνο εάν: $r(A)=n$, π.χ.: $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

35. Ορίζουσα πίνακα (determinant)

- Η ορίζουσα ενός πίνακα 1x1 είναι το ίδιο το στοιχείο:

$$\det([a_{11}]) = a_{11}$$

- Η ορίζουσα ενός πίνακα 2x2:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- Η ορίζουσα ενός πίνακα 3x3 ανάγεται στον υπολογισμό τριών οριζουσών 2x2 με τον εξής τρόπο:

Καταρχάς σε κάθε θέση αποδίδουμε ένα πρόσημο ως εξής:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Επιλέγουμε μια σειρά ή μια στήλη ως προς την οποία θα αναπτύξουμε την ορίζουσα.
Έστω ότι επιλέγουμε την πρώτη στήλη:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Αναπτύσσουμε τις τρεις ορίζουσες ως εξής:

$$* \; a_{11}\det\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & a_{22} & a_{23} \\ * & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$* \; a_{21}\left(-\det\begin{pmatrix} * & a_{12} & a_{13} \\ * & * & * \\ * & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right) = a_{21}\left(-\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right)$$

↳ Βάλαμε $-\det(\,)$ γιατί στο a_{21} αντιστοιχεί μείον (-).

$$* \; a_{31}\det\begin{pmatrix} * & a_{12} & a_{13} \\ * & a_{22} & a_{23} \\ * & * & * \end{pmatrix} = a_{31}\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

<u>Συνεπώς:</u>

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{21}\left(-\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right) + a_{31}\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$

↳ Η παραπάνω ανάπτυξη της ορίζουσας, ονομάζεται ανάπτυξη Laplace.

36. Υπολογίστε την ορίζουσα τρίτης τάξης: $\det\begin{pmatrix}10 & 3 & 5\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$

Έχουμε

$$= 10\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix}3 & 5\\ 2 & 3\end{pmatrix} + 0\det\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$= 10(3-2) - 2(9-10) = 12$$

37. Ιδιότητες Οριζουσών

- Η ορίζουσα του ανάστροφου πίνακα παραμένει ίδια:

$$\det(A^T) = \det(A)$$

π.χ.: $\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix} = 10-3 = 7 = \det\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$

- Αντιμεταθέτοντας δύο σειρές ή δύο στήλες ενός πίνακα A, η ορίζουσα του πίνακα B που προκύπτει είναι:

$$\det(B) = -\det(A)$$

π.χ.:

$\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix} = 7$ ε' $\det\begin{pmatrix}3 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix} = -7$

- Εάν ένας πίνακας έχει δύο ίδιες στήλες (ή δύο ίδιες σειρές), τότε η ορίζουσά του είναι 0 (μηδέν). π.χ.:

$$\det\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & -2\\ 2 & 1 & 2 & -5\\ 5 & 2 & 5 & 3\\ 6 & 3 & 6 & 7\end{pmatrix} = 0$$

- Πολλαπλασιάζοντας μια σειρά (ή μια στήλη) ενός πίνακα A με τον ίδιο αριθμό λ, η ορίζουσα του πίνακα B που προκύπτει είναι:

① $\det(B) = \lambda\det(A)$ ε' ② $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

π.χ.1:

$\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix} = 7$ $\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 6 & 10\end{pmatrix} = 14$, με $\lambda = 2$

π.χ.2:

$$\det\begin{pmatrix}4 & 6\\ 8 & 10\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}2\cdot 2 & 2\cdot 3\\ 2\cdot 4 & 2\cdot 5\end{pmatrix} = 2^2\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix} = -8$$

- Η ορίζουσα ενός πίνακα παραμένει η ίδια εάν σε μια σειρά ή στήλη προσθέσουμε ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης σειράς ή στήλης.
- Ένας τετραγωνικός πίνακας είναι ιδιάζων (μη αντιστρέψιμος) εάν και μόνο εάν $\det(A) = 0$

38. Κανόνας: Για έναν πίνακα A, τετραγωνικό $n\times n$, ισχύουν:

- Ο A είναι αντιστρέψιμος (μη ιδιάζων), δηλαδή υπάρχει ο A^{-1}
- Οι σειρές και οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
- $r(A) = n$ Ο βαθμός του A ισούται με n
- Το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση
- $\det(A) \neq 0$

39. Τι ονομάζουμε προσαρτημένο πίνακα (Adj(A));

Προσαρτημένο πίνακα ονομάζουμε τον ανάστροφο πίνακα των προσημασμένων ελασσόνων οριζουσών, ήτοι:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{2} & \cdots & d_{n1} \\ d_{12} & d_{22} & \cdots & d_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{1n} & d_{2n} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} = (d_{ij})^T$$

Ισχύει: $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Adj(A)}$

40. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 0 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Υπολογίστε τον πίνακα με τις προσημασμένες ελάσσονες ορίζουσες.

Ο πίνακας που ψάχνουμε υπολογίζεται με τον τύπο:

$C_{ij} = -1^{i+j} * det A_{ij}$ και είναι ο $(d_{ij}) = \begin{pmatrix} -24 & 9 & -34 \\ 17 & -11 & 21 \\ -8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Το $det A_{ij}$ είναι η ορίζουσα ενός πίνακα 2x2 κάθε φορά με στοιχεία του πίνακα A, διαγράφοντας κάθε φορά τη σειρά και τη στήλη που ανήκει το a_{ij}

πχ1 $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 0 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ $C_{11} = -1^{1+1} * [8(-3) - 2 \cdot 0] = -24$

πχ2. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 0 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ $C_{22} = -1^{2+2} * [2(-3) - 1 \cdot 5] = -11$

κτλ κτλ..

41. Με χρήση της μεθόδου εύρεσης του αντιστρόφου πίνακα με ορίζουσες, βρείτε τον αντίστροφο πίνακα του $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 0 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

- Αρχικά υπολογίζουμε τον πίνακα με τις προσημασμένες ελάσσονες ορίζουσες (τον έχουμε υπολογίσει στο 40).
- Στη συνέχεια αναστρέφουμε τον πίνακα αυτό για να πάρουμε τον προσημασμένο πίνακα:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -24 & 17 & -8 \\ 9 & -11 & 3 \\ -34 & 21 & 1 \end{pmatrix}$$

Τέλος υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα A αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη στήλη, ως εξής:

$det(A) = 2(-24) + 3(17) + 5(-8) = -37$

Προκύπτει ότι:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Adj(A) = -\frac{1}{37} \begin{pmatrix} -24 & 17 & -8 \\ 9 & -11 & 3 \\ -34 & 21 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,65 & -0,46 & 0,22 \\ -0,24 & 0,3 & -0,08 \\ -0,92 & -0,57 & -0,03 \end{pmatrix}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η ορίζουσα του A υπολογίζεται ως το άθροισμα της πρώτης στήλης του A με τη πρώτη γραμμή του Adj(A)

42. Χρησιμοποιείστε τον κανόνα του Cramer για να επιλύσετε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$3x - y + z = 2$$
$$3x + y - 2z = 9$$
$$-x + 2y + 5z = -5$$

Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Έχουμε $d_{ij} = \begin{pmatrix} 9 & \cdots \\ 7 & \cdots \\ 1 & \cdots \end{pmatrix}$

Επομένως:

$$\det(A) = 9 \cdot 3 + 7 \cdot 3 + 1(-1) = 47$$

Με τη μέθοδο Cramer προκύπτει:

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 9 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & 5 \end{pmatrix}}{47} = 76/47$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & -2 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}}{47} = 73/47$$

$$z = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 9 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}}{47} = -61/47$$

43. Η συνάρτηση προσφοράς και ζήτησης για τρία προϊόντα που πωλούνται στην ίδια αγορά μπορεί να περιγραφτεί από τις σχέσεις:

Προϊόν Α
- Ζήτηση: $Q_A = 300 - 5p_1 + 2p_2 - p_3$
- Προσφορά: $Q_A = 200 + 4p_1 - 1{,}25p_2 + 3p_3$

Προϊόν Β
- Ζήτηση: $Q_B = 1200 + 4p_1 - 30p_2$
- Προσφορά: $Q_B = 800 - 12p_1 + 40p_2$

Προϊόν Γ
- Ζήτηση: $Q_\Gamma = 147 - p_1 + p_2 - 5p_3$
- Προσφορά: $Q_\Gamma = 70 + p_1 - 2p_2 + 4p_3$

Με p_1, p_2, p_3 οι τιμές και Q_A, Q_B, Q_Γ οι ποσότητες.

↳ Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Cramer βρείτε το σημείο ισορροπίας της αγοράς.

Στο σημείο ισορροπίας η ποσότητα ζήτησης & προσφοράς είναι ίσες:

$$\text{A}: 300 - 5p_1 + 2p_2 - p_3 = 200 + 4p_1 - 1{,}25p_2 + 3p_3$$
$$\text{B}: 1200 + 4p_1 - 30p_2 = 800 - 12p_1 + 40p_2$$
$$\Gamma: 147 - p_1 + p_2 - 5p_3 = 70 + p_1 - 2p_2 + 4p_3$$

Ισοδύναμα λαμβάνουμε το γραμμικό σύστημα:

$$9p_1 - 3{,}25p_2 + 4p_3 = 100$$
$$-16p_1 + 70p_2 = 400$$
$$2p_1 - 3p_2 + 9p_3 = 77$$

Υπολογίζουμε κατ' αρχάς:

$$\det\begin{pmatrix} 9 & -3{,}25 & 4 \\ -16 & 70 & 0 \\ 2 & -3 & 9 \end{pmatrix} = 4834$$

Επιλύουμε με τη μέθοδο Cramer:

$$P_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 100 & -3{,}25 & 4 \\ 400 & 70 & 0 \\ 77 & -3 & 9 \end{pmatrix}}{4834} = 10$$

$$P_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 9 & 100 & 4 \\ -16 & 400 & 0 \\ 2 & 77 & 9 \end{pmatrix}}{4834} = 8$$

$$P_3 = \frac{\det\begin{pmatrix} 9 & -3{,}25 & 100 \\ -16 & 70 & 400 \\ 2 & -3 & 77 \end{pmatrix}}{4834} = 9$$

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις προσφοράς και ζήτησης έχουμε αντίστοιχα: $Q_A = 257$

$Q_B = 1000$

$Q_\Gamma = 100$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

$$\boxed{\{f(g(x))\}' = f'(g(x))\,g'(x)}$$

$$\boxed{a^x = \ln a \cdot a^x}$$

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

$$\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

44. Το συνολικό κόστος C (σε €) μιας εταιρείας που παράγει ένα προϊόν μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$C(Q) = -0{,}001Q^2 + 10Q + 100$$

όπου Q είναι η ποσότητα παραγωγής του προϊόντος.

α) Βρείτε το οριακό κόστος της εταιρείας (MC)

$MC = C'(Q) = -0{,}002Q + 10$ (παράγωγος της C)

β) Υπολογίστε το μέσο κόστος (AC)

$$AC = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{-0{,}001Q^2 + 10Q + 100}{Q}$$

45. Η συνάρτηση ζήτησης για ένα προϊόν περιγράφεται από τη σχέση: $p = -0{,}005Q + 100$ όπου p η τιμή πώλησης και Q η ποσότητα πώλησης. Να υπολογιστεί το οριακό έσοδο.

Το έσοδο R προκύπτει ως εξής:

$R = R(Q) = pQ = (-0{,}005Q + 100)Q = -0{,}005Q^2 + 100Q$

Για το οριακό έσοδο MR, λαμβάνουμε την παράγωγο του εσόδου ως προς Q: $MR = R'(Q) = -0{,}01Q + 100$

46. Πώς υπολογίζεται το οριακό κέρδος (MP);

Οριακό κέρδος = Οριακό Έσοδο − Οριακό Κόστος

$MP = MR - MC$

47. Πώς υπολογίζεται ο ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης f;

$$\text{Ποσοστιαίος Ρυθμός Μεταβολής} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

48. Ελαστικότητα συνάρτησης $f(x)=y$

$$e_y = f'(x)\frac{x}{f(x)} = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y}$$

49. Κοίλη και κυρτή συνάρτηση

- Εάν $f''(x)<0$ στο σημείο x τότε η f ονομάζεται **κοίλη** στο σημείο x.
- Εάν $f''(x)>0$ στο σημείο x, τότε η f ονομάζεται **κυρτή** στο σημείο x.

50. Με $y=f(x_1,x_2)=x_1^2+5x_1x_2+x_2^3$ να υπολογιστούν όλες οι μερικές παράγωγοι και να γραφτεί το διάνυσμα κλίσης (∇f) της συνάρτησης.

$$\frac{df}{dx_1} = 2x_1+5x_2$$

$$\frac{df}{dx_2} = 5x_1+3x_2^2$$

Το διάνυσμα κλίσης της f γράφεται ως εξής:

$$\nabla f = \left(\frac{df}{dx_1}, \frac{df}{dx_2}\right) = (2x_1+5x_2,\ 5x_1+3x_2^2)$$

51. Για ένα αγαθό, η συνάρτηση προσφοράς και ζήτησης είναι γραμμικές και δίνονται από τις σχέσεις:

(Προσφορά) $Q=\alpha+\beta p$ (Ζήτηση) $Q=\gamma+\delta p$

Εκφράστε την επίδραση των συντελεστών α και β της συνάρτησης προσφοράς στη τιμή και στη ποσότητα που υφίσταται στο σημείο ισορροπίας.

Το σημείο ισορροπίας προκύπτει ως η λύση του συστήματος.

$$p=\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\delta} \qquad Q=\frac{\gamma\beta-\alpha\delta}{\beta-\delta}$$

Υπολογίζουμε τώρα τις μερικές παραγώγους:

$$dp/d\alpha = -\frac{1}{\beta-\delta} \qquad dp/d\beta = \frac{\alpha-\gamma}{(\beta-\delta)^2}$$

Επίσης:

$$dQ/d\alpha = -\frac{\delta}{\beta-\delta}$$

$$dQ/d\beta = -\frac{\gamma\delta+\alpha\delta}{(\beta-\delta)^2}$$

52. Για τη συνάρτηση $f(x,y,z)=2xz+z^3+e^{x+y}+\ln(2zy)$ υπολογίστε το ολικό διαφορικό.

• Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους της f:

$$\boxed{\frac{df}{dx}=2z+e^{x+y}} \quad \boxed{\frac{df}{dy}=e^{x+y}+\frac{1}{y}} \quad \boxed{\frac{df}{dz}=2x+3z^2+\frac{1}{z}}$$

Στη συνέχεια μπορούμε να γράψουμε το ολικό διαφορικό ως εξής:

$$df=\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dz}dz$$

$$=(2z+e^{x+y})dx+\left(e^{x+y}+\frac{1}{y}\right)dy+\left(2x+3z^2+\frac{1}{z}\right)dz$$

53. Η συνάρτηση κόστους για μια εταιρεία που παράγει δύο προϊόντα δίνεται από τη σχέση:

$$C(Q_1,Q_2)=5Q_1+4Q_2-Q_1Q_2^2-0{,}002Q_1^2$$

Για μια μεταβολή της ποσότητας παραγωγής του κάθε προϊόντος κατά dQ_1 και dQ_2 αντίστοιχα, υπολογίστε με κατάλληλη γραμμική προσέγγιση πως θα μεταβληθεί το κόστος.

Η προσέγγιση γίνεται με χρήση του ολικού διαφορικού. Συγκεκριμένα, για μεταβολή των ποσοτήτων παραγωγής κατά dQ_1 και dQ_2, αντίστοιχα, προκύπτει μεταβολή του κόστους παραγωγής κατά:

$$dC=\frac{dC}{dQ_1}dQ_1+\frac{dC}{dQ_2}dQ_2$$

Οι μερικοί παράγωγοι υπολογίζονται:

$$\boxed{\frac{dC}{dQ_1}=5-Q_2^2-0{,}004Q_1} \quad \boxed{\frac{dC}{dQ_2}=4-2Q_1Q_2}$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$dC=(5-Q_2^2-0{,}004Q_1)dQ_1+(4-2Q_1Q_2)dQ_2$$

54. Για τη συνάρτηση $f(x,y,z)=x^2+5xyz+3z^2+0{,}1yz^{-1}$ όπου $x=3z^2$ και $y=z^{1/2}$ υπολογίστε την ολ. παράγωγο $\frac{df}{dz}$

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους:

$$\frac{df}{dx}=2x+5yz$$

$$\frac{df}{dy}=5xz+0{,}1z^{-1}$$

$$\frac{df}{dz}=5xy+6z-0{,}1yz^{-2}$$

Βρίσκουμε τις παραγώγους των x,y,z ως προς z ως εξής:

$$\frac{dx}{dz}=6z \quad \frac{dy}{dz}=\frac{1}{2}z^{-1/2} \quad \frac{dz}{dz}=1$$

Έτσι η ολική παράγωγος υπολογίζεται άμεσα:

$$\frac{df}{dz}=\frac{df}{dx}\frac{dx}{dz}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dz}+\frac{df}{dz}\frac{dz}{dz}$$

↳ ΚΑΝΟΥΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ!!

55. Μια εταιρεία παράγει δύο προϊόντα και το συνολικό εβδομαδιαίο κόστος παραγωγής διαμορφώνεται ως εξής:

$$C(Q_1, Q_2) = 10\sqrt{Q_1^2+Q_2^2} + 3Q_1 + 2Q_2 + 0{,}002Q_1Q_2$$

Η εταιρεία παράγει 20 μονάδες από το πρώτο προϊόν και 15 από το δεύτερο. Επίσης επιθυμεί να αυξήσει την ποσότητα παραγωγής για το πρώτο προϊόν κατά 1 μονάδα ανά εβδομάδα και για το δεύτερο προϊόν κατά 0,5 μονάδα ανά εβδομάδα. Υπολογίστε το ρυθμό αύξησης του κόστους ανά εβδομάδα.

Αρχικά υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους του κόστους:

$$\frac{dC}{dQ_1} = 5\frac{2Q_1}{\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}} + 3 + 0{,}002Q_2$$

$$\frac{dC}{dQ_2} = 5\frac{2Q_2}{\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}} + 2 + 0{,}002Q_1$$

Για το επίπεδο παραγωγής $Q_1=20$ και $Q_2=15$ έχουμε:

$dC/dQ_1 = 11{,}03$ και $dC/dQ_2 = 8{,}04$

Στόχος της εταιρείας είναι να πετύχει αύξηση της παραγωγής, ώστε:

$\frac{dQ_1}{dt} = 1$ μονάδα/εβδομάδα

$\frac{dQ_2}{dt} = 0{,}5$ μονάδα/εβδομάδα

Η μεταβλητή t είναι η μεταβλητή του χρόνου (εκφρασμένη σε εβδομάδες). Από την έκφραση της ολικής παραγώγου προκύπτει ότι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους θα είναι:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dQ_1}\cdot\frac{dQ_1}{dt} + \frac{dC}{dQ_2}\cdot\frac{dQ_2}{dt} = 15{,}05$$ χιλιάδες € ανά εβδομάδα.

56. Να βρεθεί ο Ιακωβιανός πίνακας για τη συνάρτηση:

$Y_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2x_3 \qquad Y_2 = x_1x_2 + x_2x_3$

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους:

$\frac{dY_1}{dx_1} = 2x_1 + x_2x_3$	$\frac{dY_2}{dx_1} = x_2$
$\frac{dY_1}{dx_2} = 2x_2 + x_1x_3$	$\frac{dY_2}{dx_2} = x_1 + x_3$
$\frac{dY_1}{dx_3} = x_1x_2$	$\frac{dY_2}{dx_3} = x_2$

Σχηματίζουμε τον Ιακωβιανό πίνακα:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{dY_1}{dx_1} & \frac{dY_1}{dx_2} & \frac{dY_1}{dx_3} \\ \frac{dY_2}{dx_1} & \frac{dY_2}{dx_2} & \frac{dY_2}{dx_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1+x_2x_3 & 2x_2+x_1x_3 & x_1x_2 \\ x_2 & x_1+x_3 & x_2 \end{pmatrix}$$

57. ΣΗΜΕΙΩΣΗ

$$\text{ΟΡΙΑΚΟ ΕΣΟΔΟ} = \frac{dR}{dQ} = R'(Q) = P(1 + \epsilon_Q^{-1})$$

με ϵ_Q = ελαστικότητα ζήτησης $\frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}$

58. Κανόνας

$\det(J) = 0$

Εάν η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα είναι 0 τότε οι μεταβλητές $y_1, y_2, \ldots, y_n$ είναι συναρτησιακά εξαρτημένες.

με $y_1 = f_1(x, y)$ $\quad$ ↳ ΔΗΛΑΔΗ $y_1 = g(y_2)$

$y_2 = f_2(x, y)$ $\quad$ $y_2 = g(y_1)$

59. Υπολογίστε τον Εσσιακό πίνακα της συνάρτησης:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2$$

Οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης είναι:

$df/dx_1 = 2x_1 + 4x_2$ $\quad$ & $\quad$ $df/dx_2 = 4x_1$

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης:

$$\frac{d^2f}{dx_1^2} = 2 \qquad \frac{d^2f}{dx_1dx_2} = 4$$

$$\frac{d^2f}{dx_2^2} = 0 \qquad \frac{d^2f}{dx_2dx_1} = 4$$

Ο Εσσιανός πίνακας θα είναι ο:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{d^2f}{dx_1^2} & \frac{d^2f}{dx_1dx_2} \\ \frac{d^2f}{dx_2dx_1} & \frac{d^2f}{dx_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

60. ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

- $\frac{d^2f}{dx_1dx_2}$ = Η μερική παράγωγος της $\frac{df}{dx_1}$ ως προς x_2.
- ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΛΕΓΜΕΝΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.

Υποθέσεις:

1. Υπάρχει κάποιο σημείο $(x_1, \ldots, x_n, y)$ το οποίο ικανοποιεί τη σχέση $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$
2. Οι μερικές παράγωγοι της F ως προς κάθε μία μεταβλητή μπορούν να υπολογιστούν και είναι συνεχείς συναρτήσεις.
3. Ισχύει ότι $\frac{dF}{dy}(x_1, \ldots, x_n, y) \neq 0$

Συμπέρασμα

Η μεταβλητή y μπορεί να αποδοθεί ως συνάρτηση των υπολοίπων μεταβλητών: $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ σε μία περιοχή του σημείου $(x_1, \ldots, x_n)$

61. Μια εταιρεία παραγωγής παπουτσιών μπορεί να παράγει εβδομαδιαία x χιλιάδες ζευγάρια ανδρικά παπούτσια και y χιλιάδες ζευγάρια γυναικεία παπούτσια, όπου ικανοποιείται η σχέση:
$2x^3+y^3+5x+4y=12$ Εξετάστε εάν είναι δυνατό να εκφράσουμε τον αριθμό των γυναικείων παπουτσιών ως συνάρτηση της ποσότητας των ανδρικών παπουτσιών, με τη σαφή μορφή $y=f(x)$. Η διερεύνηση να γίνει σε μια περιοχή του σημείου (1,1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x,y)=2x^3+y^3+5x+4y-12=0$

Διαπιστώνουμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης. Συγκεκριμένα:

1) $F(1,1)=0$

2) $\frac{dF}{dx}=6x^2+5$ → είναι συνεχής συνάρτηση

$\frac{dF}{dy}=3y^2+4$ → είναι συνεχής συνάρτηση

3) $\frac{dF}{dy}(1,1)=7\neq 0$

Από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης έπεται ότι είναι δυνατή η έκφραση $y=f(x)$ σε μια περιοχή του (1,1)

62. Αν $f(x,y)=x^3y^2-1=0$, να υπολογιστεί στο σημείο $x=1$ και $y=1$ η τιμή της παραγώγου $\frac{dy}{dx}$ με δεδομένο ότι το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης μπορεί να εφαρμοστεί.

Αφού εφαρμόζεται, ισχύει:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}=-\frac{3x^2y^2}{2x^3y}\overset{(1,1)}{=}-\frac{3}{2}$$

63. Μια οικονομετρική μελέτη έδειξε σε μια χώρα ότι η αποταμίευση S που μετράται συνδέεται με το εθνικό εισόδημα I με τη σχέση: $S^2+\frac{1}{2}I^2=SI+I$ Με βάση το παραπάνω εμπειρικό αποτέλεσμα, υπολογίστε την οριακή ροπή προς αποταμίευση dS/dI

① Θεωρούμε τη σχέση: $F(I,S)=S^2+\frac{1}{2}I^2-SI-I=0$

• Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης ②

$\frac{dF}{dI}=I-S-1$ (συνεχής)	$\frac{dF}{dS}=2S-I$ (συνεχής)

③ Υποθέτουμε ότι $S\neq\frac{1}{2}I$

4. Από Θεώρημα Π.Σ:

$$\frac{dS}{dI}=-\frac{\frac{dF}{dI}}{\frac{dF}{dS}}=-\frac{I-S-1}{2S-I}$$

64. Μια βιομηχανική επιχείρηση διατηρεί σταθερή την ποσότητα παραγωγής της στο επίπεδο των 10.000 μονάδων προϊόντος εβδομαδιαία. Η ποσότητα παραγωγής Q συνδέεται με το κεφάλαιο K και την εργασία L με τη σχέση: $Q = K^2 + L^3 + 2K^2L$
Η επιχείρηση ενδιαφέρεται να υποκαταστήσει κάποιο μέρος της εργασίας με κεφάλαιο. Να βρεθεί ο οριακός λόγος υποκατάστασης της εργασίας από το κεφάλαιο με τον οποίο μπορεί η επιχείρηση να προχωρήσει σε τροποποίηση της παραγωγικής της διαδικασίας.

Διαπιστώνουμε ότι $Q = K^2 + L^3 + 2K^2L = 10.000$

- Συνεπώς έχουμε: $F(K,L) = K^2 + L^3 + 2K^2L - 10.000 = 0$

Επαληθεύουμε τις υποθέσεις του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης:

- $\frac{dF}{dK} = 2K + 4KL$ (συνεχής) $\frac{dF}{dL} = 3L^2 + 2K^2$

- Από τα δεδομένα η επιχείρηση απασχολεί K και L. Επομένως $K \neq 0$ και $L \neq 0$ και $\frac{dF}{dL} \neq 0$

Επομένως $\frac{dL}{dK} = -\frac{\frac{dF}{dK}}{\frac{dF}{dL}} = -\frac{2K + 4KL}{3L^2 + 2K^2}$

... το οποίο αποτελεί τον οριακό λόγο τεχνικής υποκατάστασης της εργασίας από κεφάλαιο για την βιομηχανική επιχείρηση.

65. Θεώρημα Πεπλεγμένης Διανυσματικής Συνάρτησης.

1) Το σημείο $(x_1, \dots x_k, y_1, \dots, y_m)$ ικανοποιεί το σύστημα των δεδομένων εξισώσεων.

2) Ο Ιακωβιανός πίνακας των μερικών παραγώγων υπολογιζόμενος στο σημείο $(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m)$ είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή $\det(J) \neq 0$ στο σημείο αυτό

3) Όλες οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς συναρτήσεις

Συμπέρασμα: Είναι δυνατό σε μια περιοχή του σημείου $(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m)$ να έχουμε:

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_k)$$
$$\vdots$$
$$y_m = f_m(x_1, \dots, x_k)$$ όπου $f_1, f_2, \dots, f_m$ κατάλληλες συναρτήσεις.

66. Θεωρούμε τις παρακάτω εξισώσεις οι οποίες ορίζουν πεπλεγμένα τα x, y, w, z ως εξής:

$$xw - yz = 0$$
$$x^2 + y^2 - w^2 - z^2 = 0$$
$$2x^3 + y^3 - w^2 - 2z^2 = 0$$

Εξετάστε εάν είναι δυνατό να αποδοθούν οι μεταβλητές w, y και z ως συναρτήσεις της μεταβλητής x σε μια περιοχή του σημείου $(x, y, w, z) = (1,1,1,1)$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$F_1(x,y,w,z) = xw - yz = 0$

$F_2(x,y,w,z) = x^2+y^2-w^2-z^2 = 0$

$F_3(x,y,w,z) = 2x^3+y^3-w^2-2z^2 = 0$

- Το σημείο $(1,1,1,1)$ ικανοποιεί το σύστημα
- Ο Ιακωβιανός πίνακας είναι:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{dF_1}{dy} & \frac{dF_1}{dw} & \frac{dF_1}{dz} \\ \frac{dF_2}{dy} & \frac{dF_2}{dw} & \frac{dF_2}{dz} \\ \frac{dF_3}{dy} & \frac{dF_3}{dw} & \frac{dF_3}{dz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z & x & -y \\ 2y & -2w & -2z \\ 3y^2 & -2w & -4z \end{pmatrix}$$

Στο σημείο $(1,1,1,1)$ έχουμε:

$$\det(J) = -4 \neq 0$$

- Όλες οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς.

↳ Από Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης μπορούν οι x, y και z να αποδοθούν ως συναρτήσεις της x ως εξής:

$y = f_1(x)$

$w = f_2(x)$

$z = f_3(x)$

67. Η συνάρτηση ζήτησης για ένα προϊόν που παράγει μια επιχείρηση είναι: $p = -20Q + 5200$. Το συνολικό κόστος C παραγωγής του προϊόντος δίνεται από τη συνάρτηση $C = 3000Q + 2Q^2$. Να βρεθεί η ποσότητα Q η οποία μεγιστοποιεί το κέρδος της επιχείρησης. Το κέρδος K δίνεται από:

$K = $ Έσοδο $-$ Κόστος $= pQ - C = -22Q^2 + 2200Q$

Για να μεγιστοποιήσουμε το κέρδος έχουμε:

$K'(Q) = -44Q + 2200$

Τα κρίσιμα σημεία προκύπτουν από την εξίσωση $K'(Q) = 0$

$K'(Q) = -44Q + 2200 = 0 \Leftrightarrow Q = 50$

Ελέγχουμε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου:

$K''(Q) = -44 < 0$ Επομένως το κέρδος μεγιστοποιείται για $Q = 50$

> **ΘΕΩΡΙΑ**
>
> Στο σημείο x για το οποίο $f'(x) = 0$
> - εάν $f''(x) < 0$, το σημείο x είναι μέγιστο
> - εάν $f''(x) > 0$, το σημείο x είναι ελάχιστο

68. Ποια η συνάρτηση κόστους C εάν το μοναδιαίο κόστος αγοράς του προϊόντος είναι 2€;

$C = 2Q$

69. Μια εταιρεία δραστηριοποιείται σε δύο αγορές την εγχώρια αγορά και την αγορά του εξωτερικού (μέσω εξαγωγών). Η συνάρτηση ημερήσιας ζήτησης σε κάθε μία αγορά έχει ως εξής:

Εγχώρια αγορά: $p_1 = -5Q_1 + 200$

Αγορά εξωτερικού: $p_2 = -6Q_2 + 360$

Το μεταβλητό κόστος της εταιρείας διαμορφώνεται σε 10€ ανά μονάδα προϊόντος, ενώ υφίσταται ένα πάγιο ημερήσιο κόστος 1000€ για όλη την εταιρεία. Η εταιρεία ενδιαφέρεται να εφαρμόσει ενιαία τιμολογιακή πολιτική για τις δύο αγορές με την ίδια τιμή πώλησης. Βρείτε την τιμή πώλησης που μεγιστοποιεί το κέρδος της εταιρείας.

Ονομάζουμε p την ενιαία τιμή που ισχύει και για τις δύο αγορές:

Εγχώρια αγορά: $p = -5Q_1 + 200$

Αγορά εξωτερικού: $p = -6Q_2 + 360$

Λύνοντας ως προς Q_1 και Q_2 υπολογίζουμε την ποσότητα πώλησης σε κάθε μια αγορά: $Q_1 = -0{,}2p + 40 \quad Q_2 = -0{,}166p + 60$

- Το συνολικό (ημερήσιο) έσοδο της εταιρείας είναι:

$$ΣΕ = pQ_1 + pQ_2 = -0{,}366p^2 + 100p$$

- Το συνολικό (ημερήσιο) κόστος υπολογίζεται ως εξής:

$$ΣΚ = 10(Q_1 + Q_2) + 1000 \overset{[\dots]}{=\!=} -3{,}666p + 2000$$

↳ Έπεται ότι το συνολικό ημερήσιο κέρδος θα είναι:

$$K = ΣΕ - ΣΚ \overset{[\dots]}{=\!=} -0{,}366p^2 + 103{,}666p - 2000$$

Παίρνουμε την πρώτη παράγωγο του K και την εξισώνουμε με το μηδέν

$$K'(p) = 2(-0{,}366)p + 103{,}666 = 0 \Leftrightarrow p = 141{,}62$$

Ελέγχουμε το πρόσημο της Β' παραγώγου...

$$K''(p) = -0{,}732 < 0$$

Συνεπώς όταν η τιμή p είναι 141,62 ανά μονάδα προϊόντος, το ημερήσιο κέρδος μεγιστοποιείται.

70. Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης:

$$f(x,y) = -x^4 - y^3 + 108x + 27y$$

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα στάσιμα σημεία που ικανοποιούν το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= -4x^3 + 108 \\ \frac{df}{dy} &= -3y^2 + 27 \end{aligned}\right\} \text{ Η λύση είναι το σημείο } (3,3)$$

71. Θετικά/αρνητικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας.

- Ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος εάν και μόνο εάν όλες οι διαδοχικές ελάσσονες ορίζουσες είναι θετικοί αριθμοί.
- Είναι αρνητικά ορισμένος εάν και μόνο εάν οι διαδοχικές ελάσσονες ορίζουσες είναι εναλλάξ $-, +, -$ (Α, Β, Γ)

Με:

Α) a_{11} Β) $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ Γ) $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

72. Εύρεση μεγίστου/ελαχίστου με Εσσιανό πίνακα

Σε ένα στάσιμο σημείο $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ της f, δηλαδή σε ένα σημείο όπου $\frac{df}{dx_1} = \frac{df}{dx_2} = \ldots = 0$

- εάν ο Εσσιανός πίνακας είναι θετικά ορισμένος, τότε το σημείο $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ είναι ελάχιστο
- εάν ο Εσσιανός πίνακας είναι αρνητικά ορισμένος τότε το σημείο $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ είναι μέγιστο.

73. Διερευνήστε εάν τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης:

$$f(x,y,z) = 2x^2 + xy + y^2 + 100 - z(x+y-200)$$

αποτελούν μέγιστο ή ελάχιστο.

Σχηματίζουμε τον Εσσιανό πίνακα:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{d^2f}{dx^2} & \frac{d^2f}{dxdy} & \frac{d^2f}{dxdz} \\ \frac{d^2f}{dxdy} & \frac{d^2f}{dy^2} & \frac{d^2f}{dydz} \\ \frac{d^2f}{dxdz} & \frac{d^2f}{dydz} & \frac{d^2f}{dz^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Οι διαδοχικές ελάσσονες ορίζουσες του Εσσιανού πίνακα είναι:

$\det(H_1) = 4 > 0 \quad \det(H_2) = 7 > 0 \quad \det(H_3) = -4 < 0$

Άρα ο Εσσιανός πίνακας δεν είναι ούτε αρνητικά ούτε θετικά ορισμένος. Συνεπώς το στάσιμο σημείο δεν αποτελεί μέγιστο ή ελάχιστο.

74. Μια επιχείρηση παράγει ένα προϊόν σε δύο συσκευασίες. Το κόστος της πρώτης συσκευασίας είναι 10 λεπτά ανά τεμάχιο ενώ το κόστος της δεύτερης συσκευασίας είναι 20 λεπτά ανά τεμάχιο. Ισχύει ότι:

$Q_1 = p_2 - p_1$ και $Q_2 = 60 + p_1 - 3p_2$

Βρείτε τις τιμές p_1, p_2 που μεγιστοποιούν το κέρδος της επιχείρησης και δείξτε ότι οι τιμές αυτές που βρήκατε πράγματι αντιστοιχούν σε μέγιστο.

Η συνάρτηση κέρδους για την εταιρεία δίνεται από τη σχέση:

$$K = p_1Q_1 + p_2Q_2 - 10Q_1 - 20Q_2$$
$$= -p_1^2 - 3p_2^2 + 2p_1p_2 - 10p_1 + 110p_2 - 1200$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$\boxed{\frac{dK}{dp_1} = -2p_1 + 2p_2 - 10 = 0 \quad \frac{dK}{dp_2} = -6p_2 + 2p_1 + 110 = 0}$$

Η λύση του συστήματος δίνει $p_1 = 20$ και $p_2 = 25$

Υπολογίζουμε τον Εσσιανό Πίνακα της K:

$H = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ Οι διαδοχικές ελάσσονες ορίζουσες του H υπολογίζονται ως εξής:

$$\left.\begin{aligned} \det(H_1) &= -2 < 0 \\ \det(H_2) &= 8 > 0 \end{aligned}\right\} \text{Άρα ο } H \text{ είναι αρνητικά ορισμένος}$$

Συνεπώς στα $p_1 = 20$ και $p_2 = 25$ έχουμε μέγιστο.

75. Βρείτε το μέγιστο της συνάρτησης:

$z=f(x,y)=-2x^2+y^2$ όταν $x+y=1$

$x+y=1 \Leftrightarrow y=1-x$

Αντικαθιστώντας στη συνάρτηση $f(x,y)$ έχουμε:

$z=f(x,y)=-x^2-2x+1$

Μεγιστοποιούμε τώρα τη συνάρτηση:

$z=V(x)=-x^2-2x+1$

$V'(x)=-2x-2=0 \Leftrightarrow x=-1$

$V''(x)=-2<0$ επομένως το $x=-1$ αντιστοιχεί σε μέγιστο

Για $x=-1$ έχουμε $y=2$

Συμπερασματικά το μέγιστο της $f(x,y)$ επιτυγχάνεται στο $(-1,2)$

76. Βρείτε το μέγιστο της συνάρτησης $z=f(x,y)=-2x^2+y^2$ όταν $x+y=1$ με χρήση της μεθόδου πολλαπλασιαστών Lagrange.

Σχηματίζουμε τη συνάρτηση Lagrange: $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda(c-g(x,y))$

$L(x,y,\lambda)=(-2x^2+y^2)+\lambda(1-x-y)$

Εν συνεχεία λαμβάνουμε τις μερικές παραγώγους:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dL}{dx}&=-4x-\lambda=0\\ \frac{dL}{dy}&=2y-\lambda=0\\ \frac{dL}{d\lambda}&=1-x-y=0\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}x&=-1\\ y&=2\\ \lambda&=4\end{aligned}$$

Το σημείο $(-1,2,4)$ αποτελεί πιθανό ακρότατο.

77. Για δύο προϊόντα δίνονται τα εξής:

$P_1=50-Q_1+Q_2$

$P_2=30+2Q_1-Q_2$

Κόστος: $C=10Q_1+Q_1Q_2+10Q_2$

Ο αποθηκευτικός χώρος είναι για 15 μονάδες προϊόντων.

Με τη μέθοδο του Lagrange υπολογίστε πότε μεγιστοποιείται το κέρδος. Έχουμε Κέρδος: $K=P_1Q_1+P_2Q_2-C$

Περιορισμός $\boxed{Q_1+Q_2=15}$

Lagrange

$$L(Q_1,Q_2,\lambda)=\overbrace{40Q_1-Q_1^2+2Q_1Q_2+20Q_2-Q_2^2}^{K(Q_1,Q_2)}+\overbrace{\lambda(15-Q_1-Q_2)}^{\lambda[c-g(Q_1,Q_2)]}$$

Μερικές παράγωγοι:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dL}{dQ_1}&=40-2Q_1+2Q_2-\lambda=0\\ \frac{dL}{dQ_2}&=2Q_1+20-2Q_2-\lambda=0\\ \frac{dL}{d\lambda}&=15-Q_1-Q_2=0\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}Q_1&=10\\ Q_2&=5\\ \lambda&=30\end{aligned}$$

Το κέρδος μεγιστοποιείται στο σημείο $(10,5,30)$ και ισούται με $K=475$

78. Πλαισιωμένος Εσσιανός Πίνακας ($\bar{H}$)

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & (f_{xx} - \lambda g_{xx}) & (f_{xy} - \lambda g_{xy}) \\ g_y & (f_{xy} - \lambda g_{xy}) & (f_{yy} - \lambda g_{yy}) \end{pmatrix}$$

π.χ. $\frac{d^2 f}{dx dy} = f_{xy}$ Ο πίνακας $\bar{H}$ ονομάζεται πλαισιωμένος Εσσιανός πίνακας καθώς στην πρώτη σειρά και την πρώτη στήλη εμφανίζει το μηδέν και τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης της συνάρτησης περιορισμού $g(x,y)$ πλαισιώνοντας με αυτό τον τρόπο τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης ως προς x και y.

79. Συνθήκες Δεύτερης Τάξης Δεσμευμένης Βελτιστοποίησης

Για ένα στάσιμο σημείο (x_0, y_0, λ_0) της Lagrange, το οποίο προκύπτει από τις συνθήκες πρώτης τάξης, έχουμε ότι:

- Εάν $\det(\bar{H}) < 0$ τότε το (x_0, y_0) είναι τοπικό ελάχιστο
- Εάν $\det(\bar{H}) > 0$ τότε το (x_0, y_0) είναι τοπικό μέγιστο

... για τη συνάρτηση $z = f(x,y)$ υπό τον περιορισμό $g(x,y) = c$

Όπου $\bar{H}$ είναι ο πλαισιωμένος Εσσιανός πίνακας υπολογισμένος στο σημείο (x_0, y_0, λ_0).

80. Με τις συνθήκες πρώτης τάξης της μεθόδου πολλαπλασιαστών Lagrange βρέθηκε ότι το σημείο $x=-1$, $y=2$ αποτελεί πιθανό ακρότατο της συνάρτησης $z = f(x,y) = -2x^2 + y^2$ όταν $x + y = 1$. Εξετάζοντας τις συνθήκες δεύτερης τάξης διαπιστώστε εάν πράγματι πρόκειται για ακρότατο σημείο και, εάν, είναι ακρότατο, το είδος του ακροτάτου (μέγιστο ή ελάχιστο).

Σχηματίζουμε τον $\bar{H}$:

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & (f_{xx} - \lambda g_{xx}) & (f_{xy} - \lambda g_{xy}) \\ g_y & (f_{xy} - \lambda g_{xy}) & (f_{yy} - \lambda g_{yy}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την ορίζουσα του $\bar{H}$ αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη στήλη:

$$\det(\bar{H}) = 0 - 1(2-0) + 1(0+4) = 2 > 0$$

Συμπεραίνουμε ότι το σημείο $x=-1, y=2$ αποτελεί μέγιστο για την $f(x,y) = -2x^2 + y^2$ υπό τον περιορισμό $x + y = 1$

81. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο πολλαπλασιαστών Lagrange βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y) = 3x + 2y$ υπό τον περιορισμό $g(x,y) = x^2+y^2 = 13$ και στη συνέχεια διερευνήστε εάν αυτά αντιστοιχούν σε μέγιστο ή ελάχιστο.

Η συνάρτηση Lagrange γράφεται ως εξής $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda(c - g(x,y))$

$$L(x,y,\lambda) = 3x + 2y + \lambda(13 - x^2 - y^2)$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε τις συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\left.\begin{aligned} L_x &= 3 - 2\lambda x = 0 \\ L_y &= 2 - 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda &= 13 - x^2 - y^2 = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x=3,\ y=2,\ \lambda=1/2 \\ &\text{και} \\ &x=-3,\ y=-2,\ \lambda=-1/2 \end{aligned}$$

Επιπλέον εξετάζουμε τον ποιοτικό περιορισμό του προβλήματος:

$g_x = 2x = 0$ κ' $g_y = 2y = 0$

Διαπιστώνουμε ότι το σημείο $(0,0)$ δεν καλύπτει τον περιορισμό του προβλήματος καθώς $g(0,0) = 0$ ενώ απαιτείται $g(x,y) = 13$. Συνεπώς το $(0,0)$ δεν ενδιαφέρει το πρόβλημα της δεσμευμένης βελτιστοποίησης που εξετάζουμε. Ο $\bar{H}$ γράφεται ως εξής:

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & (f_{xx} - \lambda g_{xx}) & (f_{xy} - \lambda g_{xy}) \\ g_y & (f_{xy} - \lambda g_{xy}) & (f_{yy} - \lambda g_{yy}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & -2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την ορίζουσα του $\bar{H}$ αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη στήλη:

$$\det(\bar{H}) = 8x^2\lambda + 8y^2\lambda$$

- Για $x=3$, $y=2$ και $\lambda = 1/2$ έχουμε $\det(\bar{H}) > 0$ και συνεπώς το $(x,y) = (3,2)$ αντιστοιχεί σε μέγιστο για την $f(x,y)$
- Για $x=-3$, $y=-2$ και $\lambda = -1/2$ έχουμε $\det(\bar{H}) < 0$ και συνεπώς το $(x,y) = (-3,-2)$ αντιστοιχεί σε ελάχιστο για την $f(x,y)$

82. Η ποσότητα παραγωγής Q για μια εταιρεία μπορεί να εκφραστεί από την σχέση: $Q = 5K^{1/2}L^{1/3}$ όπου K αντιστοιχεί στο κεφάλαιο το οποίο χρησιμοποιείται (σε χιλ. €) και L στην εργασία (μετρούμενη σε ώρες εργασίας). Το ωριαίο κόστος εργασίας είναι 6€ ενώ το αντίστοιχο ωριαίο κόστος χρήσης κεφαλαίου είναι 10€ (ανά χίλια € κεφαλαίου). Η εταιρεία διαθέτει στη διαδικασία παραγωγής το ποσό των 1000€ ανά ώρα. Βρείτε το κεφάλαιο K και την εργασία L που μεγιστοποιούν την ποσότητα παραγωγής, χρησιμοποιώντας πλήρως τον προϋπολογισμό που διατίθεται για την παραγωγή. Πρόκειται για ένα πρόβλημα δεσμευμένης βελτιστοποίησης της συνάρτησης: $Q = 5K^{1/2}L^{1/3}$ υπό τον περιορισμό του προϋπολογισμού: $10K + 6L = 1000$

Σχηματίζουμε τη συνάρτηση Lagrange

$$\Lambda(K,L,\lambda) = 5K^{1/2}L^{1/3} + \lambda(1000-10K-6L)$$

Εκφράζουμε τις συνθήκες Α' τάξης

- $\Lambda_K = 5\frac{1}{2}K^{-1/2}L^{1/3} - 10\lambda = 0$
- $\Lambda_L = 5\frac{1}{3}K^{1/2}L^{-2/3} - 6\lambda = 0$
- $\Lambda_\lambda = 1000 - 10K - 6\lambda = 0$

Για την επίλυση του παραπάνω συστήματος, αντικαθιστούμε $Q=5K^{1/2}L^{1/3}$

- $\Lambda_K = \frac{Q}{2K} - 10\lambda = 0$
- $\Lambda_L = \frac{Q}{3L} - 6\lambda = 0$
- $\Lambda_\lambda = 1000 - 10K - 6L = 0$

(σελ. 399-400)

$K = 60$

$Q = 4932{,}42$

$L = 66{,}66$

$\lambda = 4{,}11$

Θα διερευνήσουμε, στη συνέχεια, εάν υπάρχουν σημεία που να μην πληρούν τον ποιοτικό περιορισμό. Διαπιστώνουμε ότι για:

$g(K,L) \quad 10K+6L$ Ισχύει $\frac{dg}{dK} = 10 \neq 0$ $\frac{dg}{dL} = 6 \neq 0$

Συνεπάγεται, ότι δεν υπάρχουν σημεία που να μην πληρούν τον ποιοτικό περιορισμό. Προχωράμε, τέλος, στη διευκρίνιση της φύσης του πιθανού ακροτάτου: Σχηματίζουμε τον πλαισιωμένο Εσσιανό πίνακα:

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 6 \\ 10 & \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{Q}{K^2} & \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{Q}{KL} \\ 6 & \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{Q}{KL} & \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{Q}{L^2} \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε την $\det(\bar{H})$:

$$\det(\bar{H}) = \frac{200}{9}\frac{Q}{L^2} + 20\frac{Q}{KL} + \frac{3}{2}\frac{Q}{K^2}$$

Για K, L, Q θετικούς ισχύει $\det(\bar{H}) > 0$

Επομένως, όταν $K=60$, $L=66{,}6$ και $Q=4932{,}42$ η ορίζουσα του $\bar{H}$ είναι θετική.

Έπεται ότι όταν το κεφάλαιο K είναι 60 χιλιάδες και η εργασία L είναι 66,66 ώρες εργασίας, η ποσότητα ωριαίας παραγωγής Q της εταιρείας μεγιστοποιείται λαμβάνοντας την τιμή 4932,42 μονάδων προϊόντος, ενώ ο προϋπολογισμός των 1000€ ανά ώρα δαπανάται πλήρως.

- Ο συντελεστής Lagrange $\lambda = 4{,}11$ σημαίνει ότι η ποσότητα παραγωγής Q αναμένεται ότι θα αυξηθεί με ρυθμό 4,11 μονάδων προϊόντος για κάθε πρόσθετο € που θα διατίθεται στον προϋπολογισμό της παραγωγής.

83. Μια εταιρεία παράγει δύο προϊόντα A και B τα οποία έχουν περιθώριο κέρδους 5 (χιλ. € ανά μονάδα προϊόντος) και 6 (χιλ. € ανά μονάδα προϊόντος), αντίστοιχα. Εκτεταμένη έρευνα της παραγωγικής διαδικασίας, έδειξε ότι τα δύο προϊόντα μπορούν να παραχθούν σύμφωνα με τη σχέση:

$$Q_A^2 + 2Q_B^2 + Q_AQ_B = 800$$

Να βρεθούν οι ποσότητες παραγωγής Q_A και Q_B για τα δύο προϊόντα, οι οποίες εξασφαλίζουν το μέγιστο δυνατό περιθώριο κέρδους. Πρόκειται για πρόβλημα μεγιστοποίησης της συνάρτησης $\Pi = 5Q_A + 6Q_B$ με Π το συνολικό περιθώριο κέρδους υπό τον περιορισμό $Q_A^2 + 2Q_B^2 + Q_AQ_B = 800$

Σχηματίζουμε τη συνάρτηση Lagrange:

$$L(Q_A, Q_B, \lambda) = 5Q_A + 6Q_B + \lambda(800 - Q_A^2 - 2Q_B^2 - Q_AQ_B)$$

Εξετάζουμε τις συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\left.\begin{aligned} &\bullet \frac{dL}{dQ_A} = 5 - 2\lambda Q_A - \lambda Q_B = 0 \\ &\bullet \frac{dL}{dQ_B} = 6 - 4\lambda Q_B - \lambda Q_A = 0 \\ &\bullet \frac{dL}{d\lambda} = 800 - Q_A^2 - 2Q_B^2 - Q_AQ_B = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} Q_A &= 20 \\ Q_B &= 10 \\ \lambda &= 0{,}1 \end{aligned}$$

Προχωράμε στις συνθήκες δεύτερης τάξης σχηματίζοντας τον $\bar{H}$

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 2Q_A + Q_B & 4Q_B + Q_A \\ 2Q_A + Q_B & -2\lambda & -\lambda \\ 4Q_B + Q_A & -\lambda & -4\lambda \end{pmatrix}$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές $Q_A = 20$, $Q_B = 10$, $\lambda = 0{,}1$

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 50 \\ 50 & -0{,}2 & -0{,}1 \\ 50 & -0{,}1 & -0{,}4 \end{pmatrix}$$

$$\det(\bar{H}) = -50(-20+5) + 50(-5+10) = 1250 > 0$$

Συμπεραίνουμε ότι το σημείο $Q_A = 20$, $Q_B = 10$ και $\lambda = 0{,}1$ μεγιστοποιεί το περιθώριο κέρδους υπό τον περιορισμό της κοινής παραγωγικής διαδικασίας.

84. Η ποσότητα ζήτησης για δυο προϊόντα τα οποία πωλεί μια επιχείρηση δίνεται από τις σχέσεις:

(A): $P_1 = -0{,}2Q_1 + 0{,}03\dfrac{Q_2}{Q_1} + 200$

↳ τιμή πώλησης ↳ ποσότητα ημερήσιας ζήτησης

(B): $P_2 = -0{,}3Q_2 + 0{,}02Q_1 + 100$

Το μεταβλητό κόστος για το προϊόν A υπολογίζεται σε 10€ ανά μονάδα προϊόντος και για το B σε 8€ ανά μονάδα προϊόντος.

α) Προτείνετε το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής για την επιχείρηση.

Καθώς το σταθερό κόστος δεν μεταβάλλεται με την επιλογή των τιμών πώλησης για τα δύο προϊόντα, το κέρδος μεγιστοποιείται όταν το περιθώριο (έσοδο μείον συνολικό μεταβλητό κόστος) γίνεται μέγιστο.

Έχουμε: $\Pi = p_1Q_1 + p_2Q_2 - 10Q_1 - 8Q_2$

$= -0{,}2Q_1^2 - 0{,}3Q_2^2 + 190Q_1 + 92{,}3Q_2 + 0{,}02Q_1Q_2$

Πρόκειται για πρόβλημα μη δεσμευμένης βελτιστοποίησης του Π. Λαμβάνουμε τις μερικές παραγώγους ως προς Q_1 και Q_2 και τις εξισώνουμε με το μηδέν.

$$\left.\begin{aligned} \bullet\ \frac{d\Pi}{dQ_1} &= -0{,}4Q_1 + 190 + 0{,}02Q_2 = 0 \\ \bullet\ \frac{d\Pi}{dQ_2} &= -0{,}6Q_2 + 92{,}3 + 0{,}02Q_1 = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} Q_1 &= 169{,}95 \\ Q_2 &= 483{,}50 \end{aligned}$$

Για τις συνθήκες δεύτερης τάξης εξετάζουμε τον Εσσιανό πίνακα:

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{d^2\Pi}{dQ_1} & \dfrac{d^2\Pi}{dQ_1dQ_2} \\ \dfrac{d^2\Pi}{dQ_1dQ_2} & \dfrac{d^2\Pi}{dQ_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}4 & 0{,}02 \\ 0{,}02 & -0{,}6 \end{pmatrix}$$

Για τις διαδοχικές ελάσσονες ορίζουσες έχουμε:

$\det(H_1) = -0{,}4 < 0 \quad \det(H) = 0{,}2396 > 0$

Συνεπώς το πρόγραμμα παραγωγής $Q_1 = 169{,}95$ και $Q_2 = 483{,}50$ μεγιστοποιεί το περιθώριο (και άρα το κέρδος) της εταιρείας.

β) Ο διευθυντής παραγωγής της επιχείρησης διαπιστώνει ότι ο συνολικός αποθηκευτικός χώρος της εταιρείας είναι 500 m^3. Μια μονάδα προϊόντος A καταλαμβάνει χώρο 2 m^3 ενώ μια μονάδα προϊόντος B απαιτεί χώρο 0,5 m^3. Να βρεθεί η ποσότητα και η τιμή για κάθε προϊόν, που μεγιστοποιούν το κέρδος.

Το πρόβλημα μεγιστοποίησης του περιθωρίου, γίνεται πρόβλημα δεσμευμένης βελτιστοποίησης: $\Pi = -0{,}2Q_1^2 - 0{,}3Q_2^2 + 190Q_1 + 92{,}3Q_2 + 0{,}02Q_1Q_2$

υπό τον περιορισμό: $2Q_1 + 0{,}5Q_2 = 500$

Διαπιστώνουμε ότι για $Q_1 = 169{,}95$ & $Q_2 = 483{,}5$ δεν ικανοποιείται ο περιορισμός του αποθηκευτικού χώρου και συνεπώς δεν αποτελεί λύση.

Φτιάχνουμε τη συνάρτηση Lagrange:

$$L(Q_1, Q_2, \lambda) = -0{,}2Q_1^2 - 0{,}3Q_2^2 + 190Q_1 + 92{,}3Q_2 + 0{,}02Q_1Q_2 + \lambda(500 - 2Q_1 - 0{,}5Q_2)$$

Σχηματίζουμε τις συνθήκες πρώτης τάξης:

- $\frac{dL}{dQ_1} = -0{,}4Q_1 + 190 + 0{,}02Q_2 - 2\lambda = 0$
- $\frac{dL}{dQ_2} = -0{,}6Q_2 + 92{,}3 + 0{,}02Q_1 - 0{,}5\lambda = 0$
- $\frac{dL}{d\lambda} = 500 - 2Q_1 - 0{,}5Q_2 = 0$

Με τη μέθοδο Gauss-Jordan προκύπτουν:

$Q_1 = 220{,}66 \quad Q_2 = 117{,}37 \quad \lambda = 52{,}04$

Διερεύνηση συνθηκών Β' τάξης: Υπολογίζουμε τον Πλαισιωμένο Ε.

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0{,}5 \\ 2 & -0{,}4 & 0{,}02 \\ 0{,}5 & -0{,}02 & -0{,}6 \end{pmatrix} \rightarrow \det(\bar{H}) = 2{,}54 > 0$$

Συνεπώς επαληθεύεται ότι το πρόγραμμα παραγωγής $Q_1 = 220{,}45$ και $Q_2 = 118{,}31$ με $\lambda = 51{,}03$ πράγματι μεγιστοποιεί το κέρδος της εταιρείας, ενώ ταυτόχρονα ικανοποιείται ο περιορισμός που αφορά τον αποθηκευτικό χώρο της εταιρείας.

85. Να βρεθούν τα σημεία που πιθανώς αποτελούν ακρότατα για τη συνάρτηση $y = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ υπό τον περιορισμό:

$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 19$

Σχηματίζουμε τη συνάρτηση Lagrange:

$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda[19 - (2x_1 + 3x_2 + 5x_3)]$

Συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ \frac{dL}{dx_1} = 2x_1 - 2\lambda = 0 \\ &\bullet\ \frac{dL}{dx_2} = 2x_2 - 3\lambda = 0 \\ &\bullet\ \frac{dL}{dx_3} = 2x_3 - 5\lambda \\ &\bullet\ \frac{dL}{d\lambda} = 19 - 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1{,}5 \\ x_3 &= 2{,}5 \\ \lambda &= 1 \end{aligned}$$

Εάν θέσουμε $g(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$ αναζητούμε σημεία τα οποία δεν ικανοποιούν τον περιορισμό, δηλαδή $\frac{dg}{dx_1} = \frac{dg}{dx_2} = \frac{dg}{dx_3} = 0$

Όμως: $\frac{dg}{dx_1} = 2 \quad \frac{dg}{dx_2} = 3$ και $\frac{dg}{dx_3} = 5$

Παρατηρούμε ότι είναι αδύνατον να εντοπίσουμε σημεία που να μην ικανοποιούν τον ποιοτικό περιορισμό.

86. Μια εταιρεία παράγει τρία προϊόντα σε ποσότητες Q_1, Q_2, Q_3. Η διεύθυνση παραγωγής έχει εκτιμήσει ότι κάθε εφικτό πρόγραμμα παραγωγής οφείλει να ικανοποιεί τη σχέση $Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2=48$. Βρείτε το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής.

Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $y=Q_1+Q_2+Q_3$ υπό τον περιορισμό $Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2=48$

Θεωρούμε τη συνάρτηση Lagrange:

$$L(Q_1,Q_2,Q_3,\lambda)=Q_1+Q_2+Q_3+\lambda(48-Q_1^2-Q_2^2-Q_3^2)$$

Διατυπώνουμε τις συνθήκες πρώτης τάξης:

$$*\ \frac{dL}{dQ_1}=1+\lambda(-2Q_1)=0 \qquad *\ \frac{dL}{dQ_2}=1+\lambda(-2Q_2)=0$$

$$*\ \frac{dL}{dQ_3}=1+\lambda(-2Q_3)=0 \qquad *\ \frac{dL}{d\lambda}=48-Q_1^2-Q_2^2-Q_3^2=0$$

$$L \triangleright\ Q_1=Q_2=Q_3=4 \quad \text{και} \quad \lambda=1/8$$

Αναζητούμε σημεία τα οποία να μην τηρούν τον περιορισμό. Θέτουμε $g(Q_1,Q_2,Q_3)=Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2$. Τα σημεία που δεν ικανοποιούν τον ποιοτικό περιορισμό είναι αυτά για τα οποία: $\frac{dg}{dQ_1}=\frac{dg}{dQ_2}=\frac{dg}{dQ_3}=0$

Προκύπτει ισοδύναμα: $Q_1=Q_2=Q_3=0$

Όμως το πρόγραμμα με μηδενικές ποσότητες δεν αποτελεί δεκτή λύση.

Επομένως πιθανό ακρότατο είναι το σημείο:

$$Q_1=Q_2=Q_3=4 \quad \text{και} \quad \lambda=0{,}125$$

87. Το οριακό κόστος παραγωγής ενός προϊόντος δίνεται από τη σχέση $dC/dQ=0{,}06Q^2-0{,}02Q+12$ όπου Q εκφράζει την εβδομαδιαία ποσότητα παραγωγής της εταιρείας και C είναι το συνολικό κόστος. Το πάγιο (σταθερό) κόστος είναι 1200€. Προσδιορίστε το κόστος παραγωγής ως συνάρτηση της ποσότητας Q.

Το κόστος C υπολογίζεται ως το αόριστο ολοκλήρωμα του οριακού κόστους:

$$C=C(Q)=\int\frac{dC}{dQ}dQ=\int(0{,}06Q^2-0{,}02Q+12)dQ=$$

Κανόνας αθροίσματος: $=\int 0{,}06Q^2dQ-\int 0{,}02QdQ+\int 12dQ=$

Εξαγωγή σταθεράς: $=0{,}06\int Q^2dQ-0{,}02\int QdQ+12\int dQ=$

Αντιπαραγώγιση: $\left(0{,}06\frac{Q^3}{3}+K_1\right)-\left(0{,}02\frac{Q^2}{2}+K_2\right)+(12Q+K_3)=$

$=0{,}02Q^3-0{,}01Q^2+12Q+K$ με $K=K_1+K_2+K_3$

Για $Q=0$ το (σταθερό) κόστος είναι $C(0)=1200$

$$C(0)=0{,}02\cdot 0^3+0{,}01\cdot 0^2+12\cdot 0+K=1200 \Leftrightarrow K=1200$$

Συνεπώς: $\boxed{C=C(Q)=0{,}02Q^3-0{,}01Q^2+12Q+1200}$

88. Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$I = \int (x^2+2x)(2x+1)\,dx$$

Θέταμε $z = x^2+2x$ και ισχύει $\frac{dz}{dx} = 2x+2$

Συνεπώς: $I = \int z \frac{dz}{dx} dx = \int z\, dz$

$= \frac{z^2}{2} + C = \frac{(x^2+2x)^2}{2} + C$ Όπου C σταθερά

89. Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα: $I = e^{2x}dx$

Θέταμε $z = e^x$ και ισχύει $\frac{dz}{dx} = e^x$

Συνεπώς: $I = \int e^{2x}dx = \int e^x e^x dx = \int z \frac{dz}{dx} dx = \int z\, dz$

$= \frac{z^2}{2} + c = \frac{e^{2x}}{2} + C$ Όπου C σταθερά

90. Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα: $I = \int (6x+2)^4 dx$

Θέταμε $z = 6x+2$ και ισχύει $\frac{dz}{dx} = 6$

Συνεπώς: $I = \int z^4 dx = \int z^4 \frac{1}{6} 6\, dx = \frac{1}{6}\int z^4 6\, dx =$

$= \frac{1}{6}\int z^4 \frac{dz}{dx} dx = \frac{1}{6}\int z^4 dz = \frac{1}{6} \cdot \frac{z^{4+1}}{4+1} + C$

$= \frac{1}{6} \frac{(6x+2)^{4+1}}{4+1} + C$ Όπου C σταθερά

91. Το κεφάλαιο K μιας επένδυσης αυξάνεται με ρυθμό a, όπου a σταθερά. Το επιτόκιο προεξόφλησης R είναι σταθερό και υποθέταμε ότι ο ανατοκισμός είναι συνεχής στο χρόνο. Συνεπώς η παρούσα αξία του ρυθμού αύξησης του κεφαλαίου είναι: $\frac{dK}{dt} = ae^{-Rt}$ όπου t είναι η μεταβλητή του χρόνου.

Βρείτε την παρούσα αξία του κεφαλαίου που επενδύεται έως τη χρονική στιγμή t. Το αρχικό κεφάλαιο επένδυσης είναι 1000€

Για να βρούμε το κεφάλαιο πρέπει να ολοκληρώσουμε ως προς t:

$K = K(t) = \int \frac{dK}{dt} dt = \int a e^{-Rt} dt \rightarrow$ Θέταμε $z = -Rt$

και ισχύει $\frac{dz}{dt} = -R \rightarrow K(t) = \int a e^z dt = \int a e^z \frac{1}{-R}(-R)\,dt$

$= \left[\left(-\frac{a}{R}\right)\int e^z \frac{dz}{dt}\right] = \left[-\frac{a}{R}\int e^z dz\right] = \left[-\frac{a}{R}e^z + C\right] = \left[-\frac{a}{R}e^{-Rt} + C\right]$

Για $t=0$ το αρχικό κεφάλαιο είναι $K(0) = 1000$

$K(0) = -\frac{a}{R}e^0 + C = 1000 \leftrightarrow C = 1000 + \frac{a}{R}$

Συμπερασματικά:

$$K = K(t) = -\frac{a}{R}e^{-Rt} + \left(1000 + \frac{a}{R}\right)$$

92. Το οριακό έσοδο μιας επιχείρησης δίνεται από τη σχέση: $dR/dQ = -0{,}02Q + 20$ όπου R είναι το εβδομαδιαίο έσοδο και Q η εβδομαδιαία ποσότητα πώλησης. Βρείτε το έσοδο και στη συνέχεια τη συνάρτηση ζήτησης.

Το έσοδο R μπορεί να υπολογιστεί ως το αόριστο ολοκλήρωμα του οριακού εσόδου, ως εξής: $R = R(Q) = \int \frac{dR}{dQ}\, dQ = \int (-0{,}02Q + 20)\, dQ$

Άθροισμα $\rightarrow = -\int 0{,}02Q\, dQ + \int 20\, dQ =$

Εξαγωγή σταθεράς $\rightarrow = -0{,}02\int Q\, dQ + 20\int dQ =$

Δυναμοσυνάρτηση $\rightarrow = -\left(0{,}02\frac{Q^2}{2} + K_1\right) + (20Q + K_2) =$

$$= -0{,}01Q^2 + 20Q + K \quad \text{με } K = K_1 + K_2$$

Για να προσδιορίσουμε το K: για $Q = 0$ ισχύει έσοδο μηδέν $\rightarrow R(0) = 0$

$$R(0) = -0{,}01 \cdot 0^2 + 20 \cdot 0 + K = 0 \leftrightarrow K = 0$$

Συνεπώς $R = R(Q) = -0{,}01Q^2 + 20Q$

Για τη συνάρτηση ζήτησης, εάν p η τιμή πώλησης, έχουμε:

$$P = \frac{R(Q)}{Q} = \frac{-0{,}01Q^2 + 20Q}{Q} = -0{,}01Q + 20$$

93. Ο ρυθμός άντλησης A για μια πετρελαιοπηγή δίνεται από τη σχέση: $dA/dt = 500(2t+5)^{-2}$ όπου t η χρονική μεταβλητή. Βρείτε το συνολικό απόθεμα της πετρελαιοπηγής.

Για να βρούμε τη συνολική άντληση από την πετρελαιοπηγή μέχρι την t, ολοκληρώνουμε: $A = A(t) = \int \frac{dA}{dt}\, dt = \int 500(2t+5)^{-2}\, dt$

Θέτουμε $z = 2t + 5$ και ισχύει $\frac{dz}{dt} = 2$

$$\int 500(z)^{-2} dt = \left[250\int z^{-2} 2\, dt\right] = \left[250\int z^{-2}\frac{dz}{dt}\, dt\right] =$$

$$= 250\int z^{-2} dz = 250\frac{z^{-1}}{-1} + C = -\frac{250}{z} + C$$

$$= -\frac{250}{2t+5} + C$$ Όπου C σταθερά

Για τον προσδιορισμό του C, λέμε ότι όταν $t = 0 \leftrightarrow A(0) = 0$

$$A(0) = -50 + C \leftrightarrow \boxed{C = 50}$$

Συνοψίζοντας: $A = A(t) = \frac{-250}{2t+5} + 50$

Καθώς ο χρόνος t θα γίνεται ολοένα και πιο μεγάλος η άντληση A θα τείνει να γίνει ίση με το 50. Συνεπώς η ποσότητα πετρελαίου που βρίσκεται στην πετρελαιοπηγή είναι 50 (δεκάδες χιλ. βαρέλια).

\+ ΣΕΛ 510 – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 20 (είχε τεθεί γι' αυτό δεν παρατίθεται)

94. Το οριακό κόστος μιας εταιρείας περιγράφεται από τη σχέση

$$dC/dQ = \frac{1}{Q+1} + 6Q - 0{,}05(Q+2)^{3/2}$$

Βρείτε την αύξηση του κόστους εάν η ποσότητα παραγωγής αυξηθεί από το επίπεδο των 10 μονάδων στις 20 μονάδες.

Από το οριακό κόστος, ολοκληρώνοντας έχουμε το κόστος:

$$C = C(Q) = \int \frac{dC}{dQ} dQ = \int \left(\frac{1}{Q+1} + 6Q - 0{,}05(Q+2)^{3/2} \right) dQ$$

- Για το $\int \frac{1}{Q+1} dQ$: θέτουμε $z = Q+1$ και ισχύει $\frac{dz}{dQ} = 1$

Συνεπώς:

$$\int \frac{1}{Q+1} dQ = \int \frac{1}{z} \frac{dz}{dQ} dQ = \int \frac{1}{z} dz = \ln|z| + K_1 = \boxed{= \ln(Q+1) + K_1}$$

- Το $\int Q\, dQ$ υπολογίζεται άμεσα: $\boxed{= \frac{Q^2}{2} + K_2}$

- Για το $\int (Q+2)^{3/2} dQ$: θέτουμε $w = Q+2$ και ισχύει $\frac{dw}{dQ} = 1$

Συνεπώς:

$$= \int w^{3/2} dw = \frac{w^{5/2}}{5/2} + K_3 = \frac{2}{5} w^{5/2} + K_3 \boxed{= \frac{2}{5}(Q+2)^{5/2} + K_3}$$

Αντικαθιστώντας λαμβάνουμε:

$$C = C(Q) = \int \frac{1}{Q+1} dQ + 6\int Q\, dQ - 0{,}05 \int (Q+2)^{3/2} dQ =$$

$$= \ln(Q+1) + 3Q^2 - 0{,}02(Q+2)^{5/2} + K$$

Με $K = K_1 + K_2 + K_3$ σταθερά

Για $Q = 10$: $C(10) = 292{,}42 + K$

Για $Q = 20$: $C(20) = 1157{,}64 + K$

Η διαφορά του κόστους είναι: $C(20) - C(10) = 865{,}22$ €

95. Σύμφωνα με μια οικονομετρική μελέτη, η οριακή ροπή προς κατανάλωση σε μια χώρα, αποδίδεται από τη σχέση:

$\frac{dC}{d\ell} = -0{,}03\, \ell^{1/2} + 2$ Εκφράστε την κατανάλωση C ως προς το εισόδημα ℓ.

Η κατανάλωση C μπορεί να εκφραστεί ως το ολοκλήρωμα της οριακής ροπής προς κατανάλωση:

$$C = \int \frac{dC}{d\ell} d\ell = \int (-0{,}03\ell^{1/2} + 2)\, d\ell =$$

Άθροισμα $\rightarrow = -\int 0{,}03\ell^{1/2} d\ell + \int 2\, d\ell =$

Εξαγωγή σταθεράς $\rightarrow = -0{,}3 \int \ell^{1/2} d\ell + 2\int d\ell =$

Δυναμοσυνάρτηση $\rightarrow = -0{,}3 \frac{\ell^{3/2}}{3/2} + 2\ell + K$

Όπου K σταθερά ολοκλήρωσης

96. Κανόνας Ολοκλήρωσης κατά Μέρη

$$\boxed{\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx}$$

97. Βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x\ln(x)dx$

$$\int x\ln(x)dx = \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \ln(x)dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2\right)\ln(x) - \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)(\ln(x))'dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C$$ Όπου C σταθερά ολοκλήρωσης.

98. Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int xe^x dx$

$$\int xe^x dx = \int x(e^x)'dx = xe^x - \int (x)'e^x dx$$

$$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

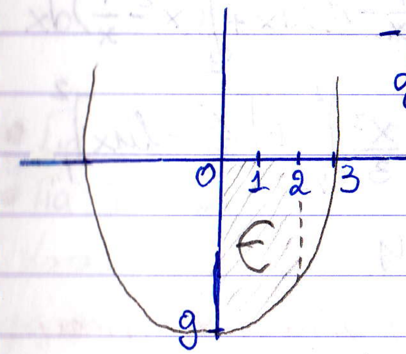
99. Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \sqrt{x}\ln(x)dx$

$$= \int \left(\frac{x^{3/2}}{3/2}\right)' \ln(x)dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\ln(x) - \int \left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln(x) - \frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln(x) - \frac{4}{9}x^{3/2} + C$$

100. Υπολογίστε το εμβαδόν επιφάνειας που ορίζεται από την $y = x^2 - 9$ και τον άξονα των x από 0 έως 2



$$-\int_0^2 (x^2-9)dx = -\left[\frac{x^3}{3} - 9x\right]_0^2$$

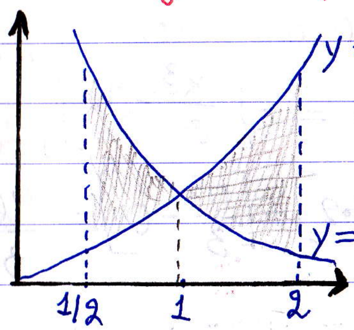
$$= -\left[\frac{2^3}{3} - 9\cdot 2\right] + \left[\frac{0^3}{3} - 0\right] = \frac{46}{3}$$

101. Βρείτε το εμβαδό που ορίζεται από τις συναρτήσεις: $y = x^2 + 5$ και $y = x^3$ από 1 έως 2

Το εμβαδό της επιφάνειας που ορίζεται από δύο συναρτήσεις $y = f(x)$ και $y = g(x)$ από α έως β μπορεί να υπολογιστεί ως: $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ όταν η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g

$$\int_1^2 (x^2 + 5 - x^3)dx = \left[\frac{x^3}{3} + 5x - \frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{43}{12}$$

102. Υπολογίστε το εμβαδό που φαίνεται στη γραφική παράσταση



$$E=\int_{1/2}^{1}\left(\frac{1}{x}-x^2\right)dx+\int_{1}^{2}\left(x^2-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\left[\ln x-\frac{x^3}{3}\right]_{1/2}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}-\ln x\right]_{1}^{2}$$

$$=49/24$$

103. Το έσοδο μιας εταιρείας $R(t)$ σε χιλ. €, μεταβάλλεται ως συνάρτηση του χρόνου t (σε έτη) σύμφωνα με τη σχέση:

$R'(t)=100+2t-t^2$

Το κόστος $C(t)$ σε χιλ €, αυξάνεται ως προς τη χρονική μεταβλητή t με τον εξής τρόπο: $C'(t)=10+t+0{,}5t^2$

Να βρεθεί η χρονική στιγμή t κατά την οποία το κέρδος της εταιρείας μεγιστοποιείται και να υπολογιστεί το αντίστοιχο συνολικό κέρδος.

Το κέρδος $P(t)$ μεγιστοποιείται όταν $P'(t)=0$, ισοδύναμα:

$R'(t)=C'(t)$

$100+2t-t^2=10+t+0{,}5t^2 \leftrightarrow 2{,}5t^2-t-90=0$

Λύσεις: $t=5{,}8$ και $t=6{,}2$

Το Κέρδος το οποίο αντιστοιχεί κατά τη χρονική στιγμή T μπορεί να βρεθεί ολοκληρώνοντας:

$$P(T)=\int_0^T P'(T)dt=\int_0^T(R'(t)-C'(t))dt=$$

$$\int_0^T(-2{,}5t^2+t+90)dt=\left[\frac{-2{,}5t^3}{3}+2t^2+90t\right]_0^T$$

$$=-\frac{2{,}5T^3}{3}+2T^2+90T$$

- Για $T=5{,}8 \rightarrow P(5{,}8)=426{,}69$
- Για $T=6{,}2 \rightarrow P(6{,}2)=436{,}27$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι κατά την $T=6{,}2$ το κέρδος μεγιστοποιείται και γίνεται 436,27 χιλιάδες €.

104. Πλεόνασμα Παραγωγών κ' Καταναλωτών

Εάν η συνάρτηση προσφοράς είναι $p=P_S(Q)$ και (P_0,Q_0) το σημείο ισορροπίας, τότε το πλεόνασμα παραγωγών PS:

$$\boxed{PS=\int_0^{Q_0}(P_0-P_S(Q))dQ}$$ ή αλλιώς, όφελος παραγωγών

Εάν η συνάρτηση ζήτησης είναι $P=P_D(Q)$ και (P_0,Q_0) το σημείο ισορροπίας, τότε το πλεόνασμα καταναλωτών CS:

$$\boxed{CS=\int_0^{Q_0}(P_D(Q)-P_0)dQ}$$ ή αλλιώς, όφελος καταναλωτών

105. Η συνάρτηση προσφοράς και ζήτησης για ένα αγαθό περι-γράφεται από τις σχέσεις:

Προσφορά: $P_S = 40Q + 300$] Υπολογίστε το πλεόνασμα

Ζήτηση: $P_D = -Q^2 + 800$] παραγωγών & καταναλωτών

Βρίσκουμε το σημείο ισορροπίας: $40Q+300 = -Q^2+800$

$Q^2+40Q-500=0 \Leftrightarrow Q=10$ ή $Q=-50$
↳ Απορρίπτεται

Για $Q_0=10 \Leftrightarrow P_0=700$

• $PS = \int_0^{Q_0}(P_0 - P_S(Q))dQ = \int_0^{10}(400-40Q)dQ = \left[400Q-20Q^2\right]_0^{10} = 2000$

• $CS = \int_0^{Q_0}(P_D(Q)-P_0)dQ = \int_0^{10}(-Q^2+790)dQ = 39.166,67$

Συμπεραίνουμε ότι η λειτουργία της εν λόγω αγοράς προσφέρει μεγαλύτερο όφελος στους καταναλωτές σε σχέση με τους παραγωγούς, καθώς κάποιοι καταναλωτές θα ήταν διατεθειμένοι να πληρώσουν σημαντικά υψηλότερη τιμή για να αγοράσουν το αγαθό. Αντίθετα, για τους παραγωγούς η συνάρτηση προσφοράς είναι γραμμική και, συνεπώς, κάποιοι παραγωγοί θα πωλούσαν το αγαθό σε (σχετικά) όχι κατά πολύ χαμηλότερη τιμή από την τιμή του σημείου ισορροπίας.

106. Αν $R(t)$ = έσοδο τη χρονική στιγμή t
$C(t)$ = κόστος τη χρονική στιγμή t και $\frac{dR}{dt} = 17 - t^{2/3}$
και $\frac{dC}{dt} = 5 + 2t^{2/3}$ Να βρεθεί το μέγιστο κέρδος.

$K(t) = R(t) - C(t)$ Ισχύει στο μέγιστο κέρδος: $K'(t)=0$
↳ κέρδος

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dR}{dt} - \frac{dC}{dt} = 0 \Leftrightarrow 17 - t^{2/3} = 5 + 2t^{2/3} \Leftrightarrow t=8$$

$$P(8) = \int_0^8 \frac{dK}{dt}dt = \int_0^8\left(\frac{dR}{dt}-\frac{dC}{dt}\right)dt = \int_0^8(12-3t^{2/3})dt$$

$$= \left[12t - 3\frac{t^{5/3}}{5/3}\right]_0^8 = 38,2$$

107. Βήματα για την επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης Α' τάξης

1. Χωρίζουμε τις μεταβλητές, ήτοι γράφουμε ισοδύναμα τη διαφορική εξίσωση ως: $\frac{dx}{dt}/\varphi(x(t)) = \psi(t)$

2. Ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη: $\int\left(\frac{dx}{dt}/\varphi(x(t))\right)dt = \int\psi(t)dt$
Ισοδύναμα λαμβάνουμε: $\int \frac{1}{\varphi(x)}dx = \int\psi(t)dt$

3. Υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα και λαμβάνουμε σε πεπλεγμένη μορφή τη συνάρτηση x, δηλαδή: $G(x) = \int\psi(t)dt$
Εάν είναι δυνατό, λύνουμε ως προς x.

108. Λύστε τη διαφορική εξίσωση $\frac{dx}{dt} = x(t)\,t^2$

Ύστερα βρείτε τη συγκεκριμένη λύση της διαφορικής εξίσωσης, δεδομένης της αρχικής συνθήκης $x(0) = 5$

Χωρίζουμε τις μεταβλητές x και t, διαιρώντας με $x(t)$

$$\frac{dx/dt}{x(t)} = t^2$$

Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε και τα δύο μέρη:

$$\int \frac{dx/dt}{x(t)}\,dt = \int t^2\,dt$$

Αλλάζουμε μεταβλητή ολοκλήρωσης στο πρώτο μέλος:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int t^2\,dt \rightarrow \ln|x| = \frac{t^3}{3} + C$$ όπου C σταθερά

Ισοδύναμα λαμβάνουμε $|x| = e^{t^3/3} e^{C}$

$\leftrightarrow x = x(t) = A e^{t^3/3}$ όπου A θετική σταθερά

➡ Για $t = 0$: $x(0) = Ae^0 = A = 5$

Έτσι, προσδιορίστηκε η σταθερά A και η λύση που ζητούμε είναι:

$$x = x(t) = 5e^{t^3/3}$$

109. Λύστε τη διαφορική εξίσωση $\frac{dx}{dt} = (x(t))^2 e^t$

Δίνεται ότι $x(0) = 3$

- Χωρίζουμε τις μεταβλητές
- Ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη:

$$\frac{dx}{dt}(x(t))^{-2} = e^t \rightarrow \int \frac{dx}{dt}(x(t))^{-2}\,dt = \int e^t\,dt$$

- Ισοδύναμα προκύπτει:

$$\int x^{-2}\,dx = \int e^t\,dt \rightarrow \frac{x^{-3}}{-3} = e^t + C$$ όπου C σταθερά

- Επιλύοντας ως προς x, έχουμε:

$x = (-3e^t + C)^{-1/3}$

- Για $t = 0$, $x(0) = (-3e^0 + C)^{-1/3} = 3$
- Λύνουμε ως προς C:

$-3 + C = 1/27 \leftrightarrow C = 3{,}037$

- Η ζητούμενη λύση είναι:

$x(t) = (-3e^t + 3{,}037)^{-1/3}$

110. Το οριακό κόστος MC για το προϊόν μιας επιχείρησης δίνεται από την εξίσωση $MC = \frac{20}{Q}$

- Να ευρεθεί η διαφορική εξίσωση του συνολικού κόστους C ως προς την ποσότητα Q

Η εξίσωση του οριακού κόστους $MC = 20/Q$ μπορεί να λάβει τη μορφή $MC = \frac{dC}{dQ} = \frac{20}{Q}$

Η παράσταση αυτή εκφράζει τη διαφορική εξίσωση του συνολικού κόστους C ως συνάρτηση της παραγόμενης ποσότητας Q.

- Να ευρεθεί η εξίσωση της συνάρτησης του συνολικού κόστους C της επιχείρησης, αν το συνολικό κόστος είναι ίσο με 400 όταν η ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος ανέρχεται σε 20 μονάδες.

Στη διαφορική εξίσωση, ολοκληρώνουμε και τις δύο πλευρές για Q

$$C = \int \frac{dC}{dQ}\, dQ = \int \frac{20}{Q}\, dQ = 20\ln(Q) + K$$

Η σταθερά ολοκλήρωσης K αντιπροσωπεύει το σταθερό κόστος της συνάρτησης του συνολικού κόστους. Για $C=400$ και $Q=20$:

$$400 = 20\ln(20) + K \leftrightarrow K = 340,08$$

Επομένως, το συνολικό κόστος C δίνεται ως:

$$C = 20\ln(Q) + 340,08$$

111. Για το οριακό κόστος μιας εταιρείας MC ισχύει ότι: $MC = dC/dQ = Q^2/C$ όπου Q η ποσότητα παραγωγής και $C(Q)$ το αντίστοιχο κόστος. Είναι γνωστό ότι το σταθερό κόστος της εταιρείας, ήτοι το κόστος όταν $Q=0$, είναι 10 χιλ. €.

Προσδιορίστε τη συνάρτηση του κόστους $C=C(Q)$

Επιλύουμε τη διαφορική εξίσωση: $\frac{dC}{dQ} = \frac{Q^2}{C}$

Χωρίζουμε τις μεταβλητές πολλαπλασιάζοντας με C:

$$C\frac{dC}{dQ} = Q^2 \xrightarrow[\text{ως προς } Q]{\text{Ολοκληρώνουμε}} \int C\frac{dC}{dQ}\, dQ = \int Q^2\, dQ$$

Προκύπτει:

$$\int C\, dC = \int Q^2\, dQ$$ Συνεπώς: $\frac{C^2}{2} = \frac{Q^3}{3} + K_1$ με K_1 σταθερά

Λύνουμε ως προς C:

$$C = \pm\sqrt{\frac{2Q^3}{3} + K}$$ με $K = 2K_1$

↳ η αρνητική τιμή απορρίπτεται λόγω μη αρνητικότητας του κόστους

Για $Q=0$, δίνεται $C(0)=10 \rightarrow C(0) = \sqrt{\frac{2\cdot 0}{3} + K} = 10$

$\leftrightarrow K = 10^2 = 100$

Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση του κόστους είναι η:

$$C = \sqrt{\frac{2Q^3}{3} + 100}$$

112. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $\frac{dx}{dt} = \frac{e^{x(t)}}{t\,x(t)}$

- Χωρίζουμε τις μεταβλητές:

$$x(t)e^{-x(t)}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$$

- Ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη:

$$\int x(t)e^{-x(t)}\frac{dx}{dt}dt = \int \frac{1}{t}dt$$

- Αλλάζουμε μεταβλητή ολοκλήρωσης

$$\int x e^{-x}dx = \int \frac{1}{t}dt \Leftrightarrow -e^{-x}(1+x) = \ln(t) + C$$

με C σταθερά

- Η σχέση $\ln(t) + xe^{-x} + e^{-x} = C$ προσδιορίζει το x ως προς t σε πεπλεγμένη μορφή, χωρίς να είναι δυνατός ο απευθείας προσδιορισμός (σε λυμένη μορφή) του x εκφρασμένα ως συνάρτηση του t.

113. Η γενική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης Α' τάξης με σταθερό συντελεστή και σταθερό όρο:

$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + B$ είναι $x(t) = -\frac{B}{A} + Ce^{At}$

με C σταθερά.

114. Λύστε τη διαφορική εξίσωση $y'(t) + 8y(t) = 5$ υπό την αρχική συνθήκη $y(0) = 2$

Πρόκειται για γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερό συντελεστή και σταθερό όρο, ήτοι $A = -8$ και $B = 5$. Επομένως:

$$y(t) = \frac{5}{8} + Ce^{-8t} \xrightarrow{t=0} y(0) = \underbrace{\frac{5}{8} + Ce^{0}}_{} = 2$$

$\rightarrow C = 1{,}375$

Η ζητούμενη λύση είναι:

$$y(t) = \frac{5}{8} + 1{,}375e^{-8t}$$

115. Λύστε την $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \Leftrightarrow y\frac{dy}{dx} = x^2 \Leftrightarrow \int y\frac{dy}{\cancel{dx}}\cancel{dx} = \int x^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{2} + C_1 = \frac{x^3}{3} + C_2 \Leftrightarrow y^2 = \frac{2}{3}x^3 + C$$

$$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3 + C} \xrightarrow[y(0)=2]{x=0} 2 = \pm\sqrt{0 + C}$$

ΑΡΑ $y = \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + 4}$

116. Λύστε την $y' = \frac{dy}{dt} = \frac{e^t}{y}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{e^t}{y} \leftrightarrow y\frac{dy}{dt} = e^t \leftrightarrow \int y\frac{dy}{\cancel{dt}}\cancel{dt} = \int e^t dt$$

$$\leftrightarrow \frac{y^2}{2} = e^t + C \leftrightarrow y = \pm\sqrt{2(e^t+C)}$$

117. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int x^2 e^{2x+1} dx$

$$= \int x^2 \frac{1}{2}(e^{2x+1})' dx = \frac{1}{2}x^2 e^{2x+1} - \frac{1}{2}\int (x^2)' e^{2x+1} dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{2x+1} - \int x \frac{1}{2}(e^{2x+1})' dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{2x+1} - \frac{1}{2}x e^{2x+1} + \frac{1}{2}\int (x)' e^{2x+1} dx$$

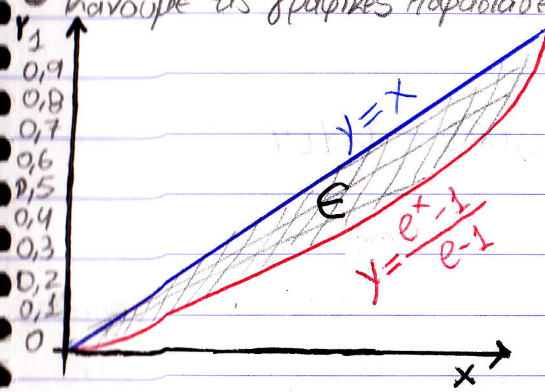
$$= \frac{1}{2}x^2 e^{2x+1} - \frac{1}{2}x e^{2x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x+1} + C$$

με C σταθερά

Ολοκλήρωση κατά μέρη

118. Σε μια χώρα η καμπύλη Lorenz περιγράφεται από τη σχέση $y = f(x) = \frac{e^x - 1}{e-1}$. Η καμπύλη Lorenz ομοιόμορφης κατανομής εισοδήματος αντιστοιχεί στη συνάρτηση $y = g(x) = x$. Υπολογίστε το εμβαδόν που περικλείεται από τις δύο καμπύλες για x από 0 έως 1.

• Κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις:



Παρατηρούμε ότι η $y=g(x)$ βρίσκεται μονίμως υψηλότερα της $y=f(x)$

Το Εμβαδό E υπολογίζεται ως το ολοκλήρωμα:

$$E = \int_0^1 (g(x) - f(x))dx = \int_0^1 \left(x - \frac{e^x - 1}{e-1}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{e^x}{e-1} + \frac{x}{e-1}\right]_0^1 = 0{,}082$$

• Εκφράστε το εμβαδόν E της επιφάνειας μεταξύ των δύο καμπυλών ως ποσοστό του εμβαδού A της επιφάνειας που βρίσκεται κάτω από την $y=g(x)=x$ και δώστε την ερμηνεία του αριθμού που προκύπτει.

Το Εμβαδόν Ε υπολογίστηκε 0,082
Το εμβαδόν A της επιφάνειας κάτω από την $y=g(x)=x$
υπολογίζεται άμεσα ως:

$$A=\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=1/2$$

Σχηματίζουμε τώρα τον συντελεστή:

$$G=\frac{E}{A}=\frac{E}{1/2}=2E=2\cdot 0{,}082=0{,}164$$

Ο συντελεστής G ονομάζεται συντελεστής ανισότητας ή δείκτης Gini. Στην περίπτωση ομοιόμορφης κατανομής του εισοδήματος στον πληθυσμό, ο G λαμβάνει την τιμή 0. Αντίθετα, όταν $G=1$, τότε υπάρχει πλήρης ανισότητα στην κατανομή του εισοδήματος στον πληθυσμό, καθώς ένα μόνο άτομο διαθέτει το συνολικό εισόδημα.

→ Η καμπύλη Lorenz περιγράφει τον τρόπο κατανομής του συνολικού εισοδήματος στον πληθυσμό. Αν έχει τη μορφή $y=x$ τότε ΔΕΝ υφίσταται ανισότητα στην κατανομή του εισοδήματος.