



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

Αν $a = 4 - 2\frac{1}{5}$ και $b = 5 + \frac{-3}{2} - \frac{-5}{-2}$, να υπολογίσετε την τιμή παράστασης:

$$A = a : b^{2009} - b - \frac{1}{5a}.$$

Λύση.

Είναι

$$a = 4 - 2\frac{1}{5} = \frac{4}{1} - \frac{11}{5} = \frac{20}{5} - \frac{11}{5} = \frac{9}{5} \text{ και } b = 5 + \frac{-3}{2} - \frac{-5}{-2} = 5 - \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = 5 - \frac{8}{2} = 5 - 4 = 1,$$

οπότε η παράσταση Α γίνεται:

$$A = a : b^{2009} - b - \frac{1}{5a} = \frac{9}{5} : 1^{2009} - 1 - \frac{1}{5 \cdot \frac{9}{5}} = \frac{9}{5} : 1 - 1 - \frac{1}{9} = \frac{9}{5} - 1 - \frac{1}{9} = \frac{9}{5} - \frac{1}{9} = \frac{76}{45} - 1 = \frac{31}{45}.$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω α θετικός ακέραιος τον οποίο διαιρούμε με 4.

(i) Ποιες είναι οι δυνατές μορφές του παραπάνω θετικού ακέραιου α;

(ii) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός α, αν είναι περιττός μεγαλύτερος από 39 και μικρότερος από 50, και διαιρούμενος με το 4 δίνει υπόλοιπο 1.

Λύση

(i) Οι δυνατές μορφές του ακέραιου αριθμού α είναι οι εξής:

$\alpha = 4\rho$, όπου ρ θετικός ακέραιος, ή $\alpha = 4\rho + 1$ ή $\alpha = 4\rho + 2$ ή $\alpha = 4\rho + 3$
 όπου ρ μη αρνητικός ακέραιος.

(ii) Σύμφωνα με την υπόθεση είναι $\alpha = 4\rho + 1$, οπότε έχουμε:

$$39 < 4\rho + 1 < 50 \Leftrightarrow 38 < 4\rho < 49 \Leftrightarrow 9,5 < \rho < 12,25$$

Επομένως, αφού ο ρ είναι μη αρνητικός ακέραιος, έπεται ότι $\rho = 10$ ή $\rho = 11$ ή $\rho = 12$ και $\alpha = 41$ ή $\alpha = 45$ ή $\alpha = 49$.

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου οι γωνίες \hat{B} και $\hat{\Gamma}$ έχουν άθροισμα 140° και είναι ανάλογες με τους αριθμούς 1 και 6, αντίστοιχα.

α) Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν το ύψος και η διχοτόμος του τριγώνου $AB\Gamma$ που αντιστοιχούν στην πλευρά του $B\Gamma$.

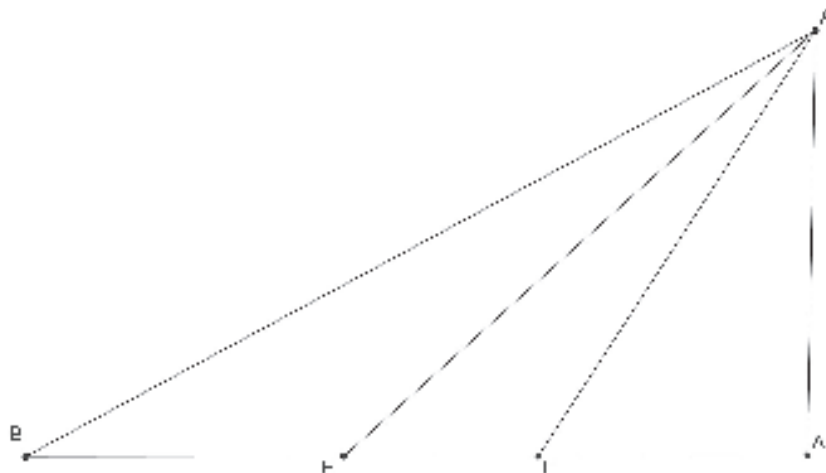
Λύση

α) Κατ' αρχή έχουμε: $\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{\Gamma}) = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.

Σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε: $\frac{\hat{B}}{1} = \frac{\hat{\Gamma}}{6}$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 140^\circ$, οπότε θα έχουμε:

$$\frac{\hat{B}}{1} = \frac{\hat{\Gamma}}{6} = \lambda \Rightarrow \hat{B} = \lambda, \hat{\Gamma} = 6\lambda \text{ και } \lambda + 6\lambda = 140^\circ \Rightarrow \lambda = 20^\circ.$$

Άρα είναι: $\hat{B} = 20^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 120^\circ$.



Σχήμα 1

β) Έστω AD το ύψος και AE η διχοτόμος της γωνίας A του τριγώνου $AB\Gamma$. Τότε το σημείο Γ βρίσκεται μεταξύ των σημείων B και Δ , αφού διαφορετικά το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ θα είχε άθροισμα γωνιών μεγαλύτερο των 180° . Έτσι έχουμε:

$$\Delta\hat{A}E = \Delta\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}E = (90^\circ - \Delta\hat{\Gamma}A) + \frac{\hat{A}}{2}. \quad (1)$$

Επειδή είναι $\hat{A} = 40^\circ$, $\Delta\hat{\Gamma}A = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, από τη σχέση (1) λαμβάνουμε $\Delta\hat{A}E = 50^\circ$.

ΘΕΜΑ 4^ο

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου, το $\frac{1}{4}$ ασχολείται με το στίβο, το $\frac{1}{5}$ ασχολείται με το μπάσκετ, το $\frac{1}{8}$ ασχολείται με το βόλεϊ και περισσεύουν και 80 μαθητές που δεν

ασχολούνται με κανένα από αυτά τα αθλήματα. Δεδομένου ότι οι μαθητές του Γυμνασίου οι ασχολούμενοι με τον αθλητισμό, ασχολούνται με ένα μόνο άθλημα, εκτός από 12 μαθητές που ασχολούνται και με το μπάσκετ και με το βόλεϊ, να βρείτε:

α) Ποιος είναι ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου;

β) Πόσοι είναι οι μαθητές του Γυμνασίου που ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ;

Λύση (1^{ος} τρόπος)

α) Έχουμε $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} = \frac{23}{40}$. Όμως στα $\frac{23}{40}$ των μαθητών του Γυμνασίου έχουν υπολογιστεί δύο φορές οι 12 μαθητές που ασχολούνται με μπάσκετ και βόλεϊ. Άρα οι $80 - 12 = 68$ μαθητές είναι τα $\frac{40}{40} - \frac{23}{40} = \frac{17}{40}$ των μαθητών του Γυμνασίου. Έτσι όλο το σχολείο έχει :

$$68 : \frac{17}{40} = 68 \cdot \frac{40}{17} = 4 \cdot 40 = 160 \text{ μαθητές.}$$

β) Μόνο με το μπάσκετ ασχολούνται $160 \cdot \frac{1}{5} - 12 = 32 - 12 = 20$ μαθητές.

2^{ος} τρόπος

α) Αν x είναι ο αριθμός των μαθητών του Σχολείου, τότε , σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{5} + \frac{x}{8} + 80 - 12 = x,$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$10x + 8x + 5x + 3200 - 480 = 40x \Leftrightarrow 17x = 2720 \Leftrightarrow x = 160.$$

β) $\frac{x}{5} - 12 = \frac{160}{5} - 12 = 20$ μαθητές ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ.

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

Αν v είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 4 \cdot (-1)^v + 2 \cdot \frac{(-1)^{2v+1}}{5} - 7 \cdot \frac{(-1)^{3v}}{5}.$$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= 4 \cdot (-1)^v + 2 \cdot \frac{(-1)^{2v+1}}{5} - 7 \cdot \frac{(-1)^{3v}}{5} = 4 \cdot (-1)^v + 2 \cdot \frac{(-1)}{5} - 7 \cdot \frac{[(-1)^3]^v}{5} \\ &= 4 \cdot (-1)^v - \frac{2}{5} - \frac{7 \cdot (-1)^v}{5} = \left(4 - \frac{7}{5}\right) \cdot (-1)^v - \frac{2}{5} = \frac{13 \cdot (-1)^v - 2}{5}, \end{aligned}$$

οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν v άρτιος, τότε $A = \frac{13-2}{5} = \frac{11}{5}$.
- Αν v περιττός, τότε $A = -3$.

ΘΕΜΑ 2^ο

Ο θετικός ακέραιος α είναι περιττός και όταν διαιρεθεί με το 5 δίνει υπόλοιπο 2. Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού α .

Λύση

Αφού ο α διαιρούμενος με το 5 αφήνει υπόλοιπο 2, θα είναι της μορφής $\alpha = 5\lambda + 2$, όπου λ μη αρνητικός ακέραιος. Όμως, αν ο λ ήταν άρτιος, τότε ο α επίσης θα ήταν άρτιος, που αντίκειται στην υπόθεση. Άρα ο λ είναι περιττός, δηλαδή είναι $\lambda = 2\kappa + 1$, όπου κ μη αρνητικός ακέραιος.

Επομένως, έχουμε

$$\alpha = 5 \cdot (2\kappa + 1) + 2 = 10\kappa + 7,$$

σχέση που δείχνει ότι ο θετικός ακέραιος α διαιρούμενος με το 10 αφήνει υπόλοιπο 7, δηλαδή με άλλα λόγια, το τελευταίο ψηφίο του α είναι 7. Διαφορετικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο α έχει κ δεκάδες και 7 μονάδες, οπότε το τελευταίο του ψηφίο είναι 7.

ΘΕΜΑ 3^ο

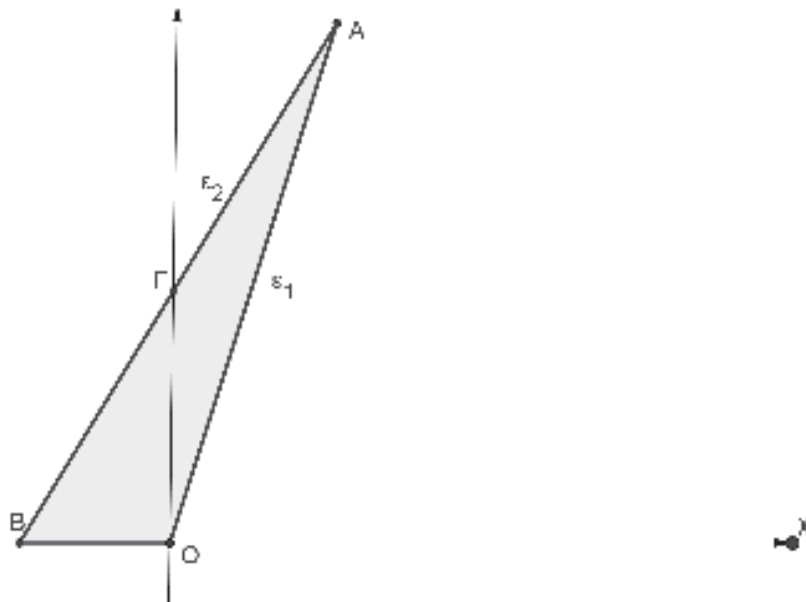
Δίνονται δυο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Α. Η ευθεία ε_1 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση 4, ενώ η ευθεία ε_2 είναι παράλληλη προς την ευθεία $(\eta): y = 2x$ και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(0,6)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των παραπάνω ευθειών καθώς και το κοινό τους σημείο Α.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο είναι η αρχή συστήματος ορθογωνίων αξόνων Οxy, Α το κοινό σημείο των ευθειών και Β το σημείο όπου η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα x' .

Λύση

α) Η ευθεία ε_1 έχει εξίσωση $y = 4x$, ενώ η ευθεία ε_2 έχει εξίσωση $y = 2x + \beta$, αφού είναι παράλληλη με την (η) . Όμως διέρχεται από το σημείο $B(0,6)$, οπότε θα ισχύει $6 = 2 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 6$. Άρα η εξίσωση της ευθείας ε_2 είναι $y = 2x + 6$. Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των δύο ευθειών βρίσκουμε ότι το κοινό σημείο τους είναι το $A(3,12)$.



Σχήμα 2

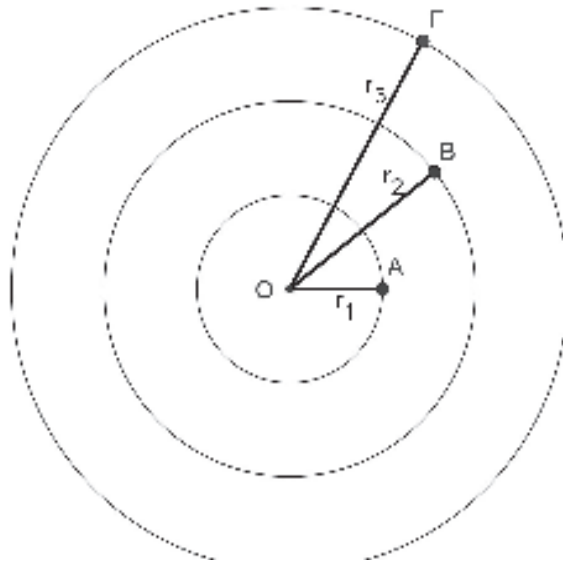
β) Η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα των x στο σημείο $B(-3,0)$, οπότε η βάση του τριγώνου έχει μήκος 3, ενώ το ύψος του ίσο με 12. Άρα έχουμε:

$$E(OAB) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 12 = 18 \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Τρεις κύκλοι έχουν το ίδιο κέντρο O και ακτίνες r_1, r_2, r_3 με $0 < r_1 < r_2 < r_3$. Έστω Δ_1 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου O και ακτίνες r_1, r_2 και Δ_2 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου O και ακτίνες r_2, r_3 . Αν είναι $r_2 - r_1 = r_3 - r_2$ και $r_3 = 3r_1$, να βρείτε το λόγο $\frac{E(\Delta_1)}{E(\Delta_2)}$, όπου $E(\Delta_1)$ και $E(\Delta_2)$ είναι τα εμβαδά των δακτυλίων Δ_1 και Δ_2 , αντίστοιχα.

Λύση



Σχήμα 3

Έχουμε

$$\frac{E(\Delta_1)}{E(\Delta_2)} = \frac{\pi(r_2^2 - r_1^2)}{\pi(r_3^2 - r_2^2)} = \frac{(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)}{(r_3 - r_2)(r_3 + r_2)} = \frac{r_2 + r_1}{r_3 + r_2}, \quad (1)$$

αφού δίνεται ότι $r_2 - r_1 = r_3 - r_2$. Από την ίδια σχέση προκύπτει ότι $r_2 = \frac{r_1 + r_3}{2}$, οπότε,

λόγω τη σχέσης $r_3 = 3r_1$ λαμβάνουμε $r_2 = \frac{r_1 + 3r_1}{2} = 2r_1$. Έτσι η σχέση (1) γίνεται

$$\frac{E(\Delta_1)}{E(\Delta_2)} = \frac{r_2 + r_1}{r_3 + r_2} = \frac{3r_1}{3r_1 + 2r_1} = \frac{3r_1}{5r_1} = \frac{3}{5}.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να βρούμε πρώτα τη σχέση $r_2 = \frac{r_1 + 3r_1}{2} = 2r_1$ και στη συνέχεια να εργαστούμε με το λόγο

$$\frac{E(\Delta_1)}{E(\Delta_2)} = \frac{\pi(r_2^2 - r_1^2)}{\pi(r_3^2 - r_2^2)} = \frac{\pi[(2r_1)^2 - r_1^2]}{\pi[(3r_1)^2 - (2r_1)^2]} = \frac{3r_1^2}{5r_1^2} = \frac{3}{5}.$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού είναι μεγαλύτερο από το δεκαπλάσιο του αριθμού κατά 75. Να βρεθεί ο αριθμός.

Λύση

Αν x είναι ο ζητούμενος αριθμός, τότε από τα δεδομένα του προβλήματος θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$x^2 - 10x = 75 \Leftrightarrow x^2 - 10x - 75 = 0 \Leftrightarrow x = 15 \text{ ή } x = -5.$$

Επειδή ο ζητούμενος αριθμός είναι θετικός, η μοναδική λύση του προβλήματος είναι ο αριθμός 15.

ΘΕΜΑ 2^ο

Αν οι αριθμοί μ και ν είναι θετικοί ακέραιοι και ισχύει ότι

$$4^{\mu-2} + 4^{\nu+2} \leq 2^{\mu+\nu+1},$$

να αποδείξετε ότι ο ακέραιος $A = 2^\mu + 2^\nu$ είναι πολλαπλάσιο του 34.

Λύση.

Η δεδομένη σχέση γράφεται στη μορφή

$$(2^2)^{\mu-2} + (2^2)^{\nu+2} - 2 \cdot 2^{\mu+\nu} \leq 0 \Leftrightarrow (2^{\mu-2})^2 + (2^{\nu+2})^2 - 2 \cdot 2^{\mu+\nu} \leq 0 \Leftrightarrow (2^{\mu-2} - 2^{\nu+2})^2 \leq 0$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$2^{\mu-2} - 2^{\nu+2} = 0 \Leftrightarrow 2^{\mu-\nu-4} = 1 \Leftrightarrow \mu - \nu - 4 = 0.$$

Επομένως έχουμε

$$A = 2^\mu + 2^\nu = 2^{\nu+4} + 2^\nu = 2^\nu \cdot (2^4 + 1) = 17 \cdot 2^\nu = 34 \cdot 2^{\nu-1},$$

που είναι πολλαπλάσιο του 34, αφού ο ν είναι θετικός ακέραιος.

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω AD ύψος του.

(α) Αν υπάρχουν σημεία E και Z των πλευρών AB και $A\Gamma$, αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν $\Delta E = \Delta Z$ και $A\hat{D}E = A\hat{D}Z$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

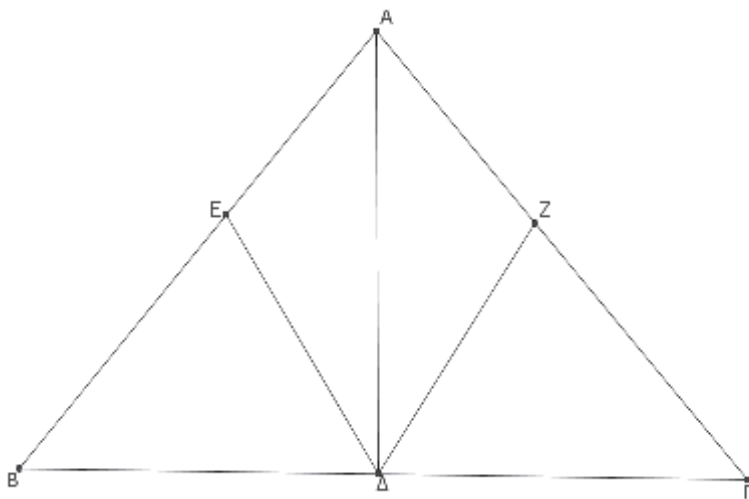
(β) Αν υπάρχουν σημεία E και Z στις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ προς το μέρος του A , αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν $\Delta E = \Delta Z$ και $A\hat{D}E = A\hat{D}Z$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Λύση

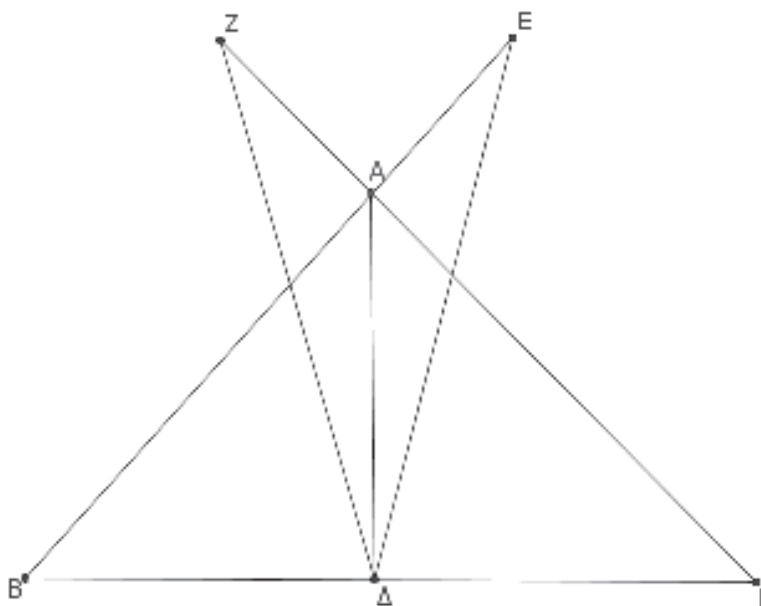
(α) Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $A\Delta Z$ έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία ($A\Delta = A\Delta, \Delta E = \Delta Z$) και τις περιεχόμενες γωνίες των ίσων πλευρών ίσες, $A\hat{D}E = A\hat{D}Z$. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $\Delta\hat{A}E = \Delta\hat{A}Z$, δηλαδή η AD είναι διχοτόμος της γωνίας \hat{A} του τριγώνου $AB\Gamma$.

Στη συνέχεια συγκρίνουμε τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta \Gamma$, τα οποία είναι ορθογώνια με $A\hat{D}B = A\hat{D}\Gamma = 90^\circ$ και έχουν την πλευρά AD κοινή και τις οξείες γωνίες

$\hat{\Delta AB}$ και $\hat{\Delta \Gamma}$ ίσες. Άρα τα τρίγωνα ΔAB και $\Delta \Gamma$ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $AB = \Gamma$, δηλαδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές



Σχήμα 4



Σχήμα 5

(β) Ομοίως όπως στο ερώτημα (α) τα τρίγωνα ΔDE και ΔDZ είναι ίσα, οπότε θα έχουν

$$\hat{\Delta DE} = \hat{\Delta DZ}.$$

Επειδή οι γωνίες $\hat{\Gamma DE}$ και $\hat{B DZ}$ είναι ίσες ως κατά κορυφή, έπεται ότι:

$$\hat{\Delta DE} - \hat{\Gamma DE} = \hat{\Delta DZ} - \hat{B DZ} \Rightarrow \hat{\Delta \Gamma} = \hat{\Delta B},$$

οπότε και στην περίπτωση αυτή προκύπτει ότι η AD είναι διχοτόμος της γωνίας \hat{A} του τριγώνου $AB\Gamma$. Στη συνέχεια προχωράμε όπως στο ερώτημα (α).

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε ως εξής:

Από την ισότητα των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΔΖ προκύπτει και η ισότητα $\hat{\Delta} \hat{Z} \hat{A} = \hat{\Delta} \hat{E} \hat{A}$,
 οπότε εύκολα προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΔΓΖ είναι ίσα, οπότε θα είναι
 $\Delta B = \Delta \Gamma$, η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ. Άρα είναι $AB = A\Gamma$.
 Και στις δύο περιπτώσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γνωστό θεώρημα της
 Γεωμετρίας, βάσει του οποίου, αν σε ένα τρίγωνο ένα ύψος του είναι και διχοτόμος,
 τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 4^ο

Μία βρύση Α γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) μία δεξαμενή σε τρεις ώρες. Μία
 δεύτερη βρύση Β γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή σε τέσσερις
 ώρες. Μία τρίτη τέλος βρύση Γ αδειάζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή
 (όταν βέβαια είναι γεμάτη) σε έξι ώρες. Ένας αυτόματος μηχανισμός ανοίγει με τυχαία
 σειρά και τις τρεις βρύσες με τον εξής τρόπο: ανοίγει μία βρύση, μετά από δύο ώρες
 ανοίγει μία άλλη και τέλος μετά από μία ώρα ανοίγει και την άλλη βρύση. Ένας άλλος
 μηχανισμός μετρά το χρόνο που χρειάζεται να γεμίσει η δεξαμενή και ξεκινά τη
 λειτουργία του μόλις πέσει νερό μέσα στη δεξαμενή. Ποια είναι εκείνη η σειρά με την
 οποία αν ανοίξει τις βρύσες ο μηχανισμός, ο αριθμός των ωρών που θα χρειαστούν (για
 να γεμίσει η δεξαμενή) να είναι ακέραιος αριθμός; Ποιος είναι σε κάθε περίπτωση
 αυτός ο ακέραιος αριθμός;

Λύση

Έστω x , ο αριθμός των ωρών που χρειάζονται για να γεμίσει η δεξαμενή. Τότε οι
 δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να ανοίξει τις βρύσες ο μηχανισμός (μαζί με τις
 αντίστοιχες εξισώσεις που δημιουργούνται) είναι:

$$(1) \text{ A-B-}\Gamma \quad \frac{x}{3} + \frac{x-2}{4} - \frac{x-3}{6} = 1 \Leftrightarrow 5x = 12 + 6 - 6 \Leftrightarrow x = \frac{12}{5}$$

$$(2) \text{ B-A-}\Gamma \quad \frac{x}{4} + \frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{6} = 1 \Leftrightarrow 5x = 12 + 8 - 6 \Leftrightarrow x = \frac{14}{5}$$

$$(3) \text{ A-}\Gamma\text{-B} \quad \frac{x}{3} - \frac{x-2}{6} + \frac{x-3}{4} = 1 \Leftrightarrow 5x = 12 + 9 - 4 \Leftrightarrow x = \frac{17}{5}$$

$$(4) \text{ B-}\Gamma\text{-A} \quad \frac{x}{4} - \frac{x-2}{6} + \frac{x-3}{3} = 1 \Leftrightarrow 5x = 12 + 12 - 4 \Leftrightarrow x = 4$$

$$(5) \text{ }\Gamma\text{-B-A} \quad \frac{x}{4} + \frac{x-1}{3} - \frac{x}{6} = 1 \Leftrightarrow 5x = 12 + 4 \Leftrightarrow x = \frac{16}{5}$$

$$(6) \text{ }\Gamma\text{-A-B} \quad \frac{x}{3} + \frac{x-1}{4} - \frac{x}{6} = 1 \Leftrightarrow 5x = 12 + 3 \Leftrightarrow x = 3$$

Ένας τρόπος ανοίγματος είναι Β-Γ-Α με αντίστοιχη διάρκεια $x = 4$ ώρες (περίπτωση
 (4)).

Ένας δεύτερος τρόπος ανοίγματος είναι Γ-Α-Β με αντίστοιχη διάρκεια $x = 3$ ώρες
 (περίπτωση (6)).

Στη περίπτωση (4) (που ανοίγει πρώτα η βρύση Β), ο χρόνος αρχίζει να μετράει με το
 άνοιγμα της βρύσης Β.

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι ο απαιτούμενος χρόνος για να γεμίσει η δεξαμενή είναι x ώρες, τότε η βρύση Β θα έχει γεμίσει τα $\frac{x}{4}$ της δεξαμενής. Στη συνέχεια ανοίγει η

βρύση Γ η οποία θα λειτουργήσει $x - 2$ ώρες και θα αδειάσει τα $\frac{x-2}{6}$ της δεξαμενής.

Τέλος θα ανοίξει η βρύση Α η οποία θα λειτουργήσει $x - 3$ ώρες και θα γεμίσει τα $\frac{x-3}{3}$ της δεξαμενής. Με αυτό τον τρόπο προκύπτει η εξίσωση (4).

Στη περίπτωση (6) (που ανοίγει πρώτα η βρύση Γ), ο χρόνος αρχίζει να μετράει με το άνοιγμα της βρύσης Α (διότι ο μηχανισμός χρονομέτρησης αρχίζει μόλις πέσει νερό στη δεξαμενή).

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι ο απαιτούμενος χρόνος για να γεμίσει η δεξαμενή είναι x ώρες, τότε η βρύση Α θα έχει γεμίσει τα $\frac{x}{3}$ της δεξαμενής. Στη συνέχεια ανοίγει η

βρύση Β η οποία θα λειτουργήσει $x - 1$ ώρες και θα γεμίσει τα $\frac{x-1}{4}$ της δεξαμενής.

Τέλος η βρύση Γ θα λειτουργήσει x ώρες, και θα αδειάσει τα $\frac{x}{6}$ της δεξαμενής. Με

αυτό τον τρόπο προκύπτει η εξίσωση (6).

Ανάλογα εξηγούνται και οι υπόλοιπες περιπτώσεις.

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1° (

Αν α, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta} \leq \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \cdot \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad (1)$$

που ισχύει γιατί είναι ισοδύναμη με την αληθή ανισότητα $0 \leq (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2$.

Επιπλέον έχουμε

$$\frac{4}{\alpha+\beta} \leq \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}, \quad (2)$$

η οποία ισχύει γιατί γράφεται ως

$$\frac{4}{\alpha+\beta} \leq \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \frac{4}{\alpha+\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} \Leftrightarrow 4\alpha\beta \leq (\alpha+\beta)^2 \Leftrightarrow 0 \leq (\alpha-\beta)^2.$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των δύο ανισοτήτων (1) και (2) λαμβάνουμε τη ζητούμενη ανισότητα

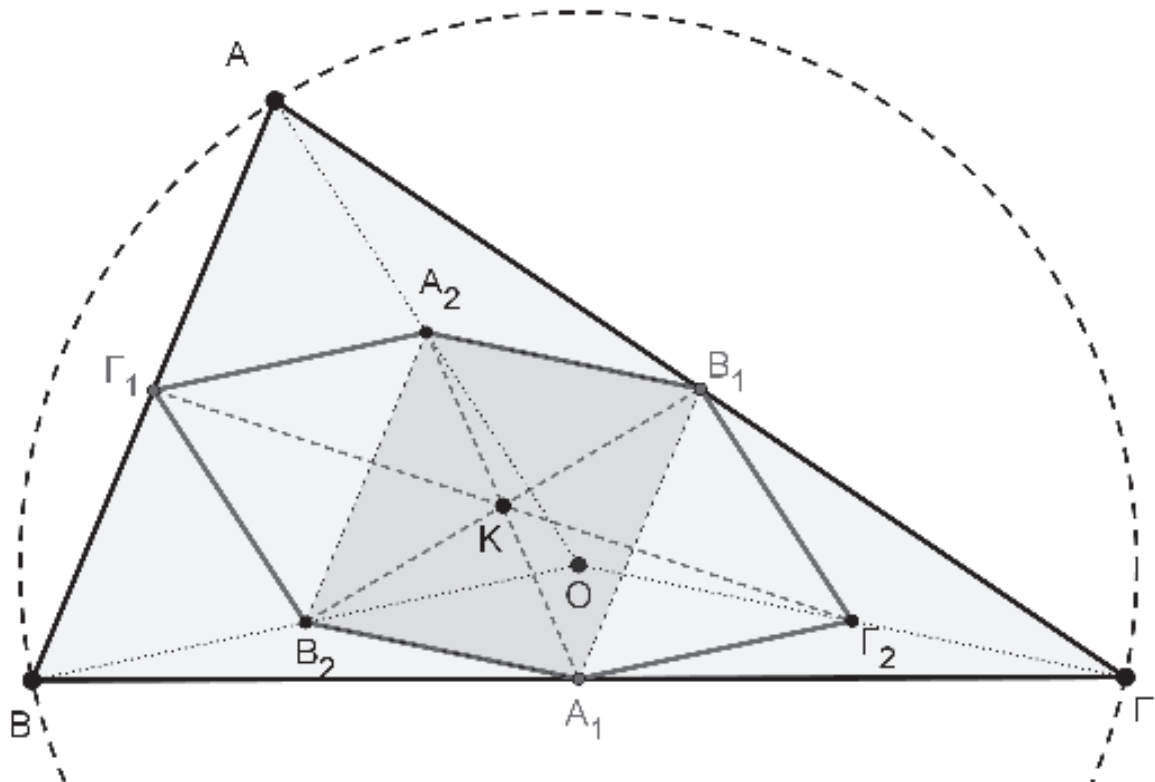
$$\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta} \leq \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \cdot \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

ΘΕΜΑ 2^ο.

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O, R)$. Αν A_1, B_1, Γ_1 είναι τα μέσα των πλευρών του $B\Gamma, A\Gamma, AB$ αντίστοιχα και A_2, B_2, Γ_2 είναι τα μέσα των $OA, OB, O\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το εξάγωνο $A_2B_1\Gamma_2A_1B_2\Gamma_1$ έχει τις πλευρές του ίσες και ότι οι διαγωνίες του A_1A_2, B_1B_2 και $\Gamma_1\Gamma_2$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση

Εφόσον O είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου, θα ισχύει: $OA = OB = O\Gamma = R$.



Σχήμα 6

Το ευθύγραμμο τμήμα A_2B_1 συνδέει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου OAG , άρα:

$$A_2B_1 = \frac{O\Gamma}{2} = \frac{R}{2} \quad (1).$$

Το ευθύγραμμο τμήμα A_1B_2 συνδέει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου $OB\Gamma$, άρα:

$$A_1B_2 = \frac{O\Gamma}{2} = \frac{R}{2} \quad (2).$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι όλες οι πλευρές του πολυγώνου είναι ίσες με $\frac{R}{2}$.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $A_1B_1A_2B_2$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγωνίες του θα διχοτομούνται στο σημείο K .

Με όμοιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $A_1\Gamma_2A_2\Gamma_1$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε και σε αυτή τη περίπτωση οι διαγώνιες θα διχοτομούνται στο σημείο K .

ΘΕΜΑ 3^ο.

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y με $x \geq 2009$ και $y \geq -2009$ ισχύει ότι:

$$\sqrt{x-2009} + \sqrt{y+2009} = \frac{x+y}{2} + 1,$$

να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = \frac{x-y+2}{2}.$$

Λύση

Οι άρρητες παραστάσεις ορίζονται γιατί δίνεται ότι: $x \geq 2009$ και $y \geq -2009$.

Αν θέσουμε $\sqrt{x-2009} = a$ και $\sqrt{y+2009} = b$, τότε λαμβάνουμε $x = a^2 + 2009$ και $y = b^2 - 2009$, από τις οποίες προκύπτει η εξίσωση $x + y = a^2 + b^2$.

Τότε η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$a + b = \frac{a^2 + b^2}{2} + 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a-1 = b-1 = 0 \Leftrightarrow a = b = 1,$$

οπότε θα είναι $x = 2010, y = -2008$ και $A = 2010$.

ΘΕΜΑ 4^ο

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} (x+y)^3 = z-2x-y \\ (y+z)^3 = x-2y-z \\ (z+x)^3 = y-2z-x \end{cases} \quad (\Sigma)$$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Λύση

Θέτουμε $x + y = \alpha$, $y + z = \beta$ και $z + x = \gamma$, οπότε το δοσμένο σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} \alpha^3 + 2\alpha = \beta \\ \beta^3 + 2\beta = \gamma \\ \gamma^3 + 2\gamma = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(\alpha^2 + 2) = \beta \\ \beta(\beta^2 + 2) = \gamma \\ \gamma(\gamma^2 + 2) = \alpha \end{cases}$$

Από τη τελευταία έκφραση του συστήματος συμπεραίνουμε ότι έχει τη προφανή λύση:

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Θα αποδείξουμε ότι το σύστημα δεν έχει άλλη λύση.

Αν $\alpha\beta\gamma \neq 0$ τότε πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις έχουμε:

$$\alpha\beta\gamma(\alpha^2 + 2)(\beta^2 + 2)(\gamma^2 + 2) = \alpha\beta\gamma \Leftrightarrow (\alpha^2 + 2)(\beta^2 + 2)(\gamma^2 + 2) = 1.$$

Η τελευταία ισότητα δεν είναι δυνατό να ισχύει, οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.

Αν υποθέσουμε ότι $\alpha = 0$ τότε θα ισχύει: $\beta = \gamma = 0$.

Αν υποθέσουμε ότι $\beta = 0$ τότε θα ισχύει: $\alpha = \gamma = 0$.

Αν υποθέσουμε ότι $\gamma = 0$ τότε θα ισχύει: $\alpha = \beta = 0$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι το σύστημα δεν έχει άλλη λύση εκτός από την $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
Άρα το αρχικό σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ z + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1°

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y που να επαληθεύουν την εξίσωση

$$2x^2 + 3x(x-2) + 11x - 10y = 2015.$$

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$x(x+1) - 2y = 403. \quad (1)$$

Επειδή για όλους τους θετικούς ακέραιους x, y οι αριθμοί $x(x+1)$ και $2y$ είναι άρτιοι θετικοί ακέραιοι και η διαφορά τους $x(x+1) - 2y$ θα είναι άρτιος θετικός ακέραιος, οπότε δεν είναι δυνατόν να ισούται με 403.

ΘΕΜΑ 2°

Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f(x - f(y)) - f(y - f(x)) = 2f(f(x) - f(y)), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι $f(x - f(x)) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Θέτουμε στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση όπου y το x και παίρνουμε:

$$f(x - f(x)) - f(x - f(x)) = 2f(f(x) - f(x)),$$

οπότε θα είναι $f(0) = 0$.

Θέτουμε στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση όπου x το 0 και παίρνουμε:

$$f(0 - f(y)) - f(y - f(0)) = 2f(f(0) - f(y))$$

και χρησιμοποιώντας την ισότητα $f(0) = 0$, καταλήγουμε:

$$f(-f(y)) - f(y) = 2f(-f(y)) \Leftrightarrow f(-f(y)) = -f(y).$$

Θέτουμε (στη τελευταία ισότητα) όπου y το x και έχουμε τη σχέση:

$$f(-f(x)) = -f(x). \quad (1)$$

Θέτουμε στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση όπου y το 0 και παίρνουμε:

$$f(x - f(0)) - f(0 - f(x)) = 2f(f(x) - f(0))$$

και χρησιμοποιώντας την ισότητα $f(0) = 0$, καταλήγουμε:

$$f(x) - f(-f(x)) = 2f(f(x)). \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $f(f(x)) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέτουμε τέλος στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση όπου y το $f(x)$ και χρησιμοποιώντας τη προηγούμενη ισότητα έχουμε $f(x - f(x)) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 3°.

Δίνονται τρεις θετικοί ακέραιοι αριθμοί της μορφής $\overbrace{\alpha 000 \dots 000 \alpha}^{2\nu-\text{ψηφία}}$, όπου α είναι

θετικός μονοψήφιος ακέραιος και μεταξύ του πρώτου και του τελευταίου ψηφίου του αριθμού $\alpha 00 \dots 00 \alpha$, μεσολαβούν 2ν το πλήθος μηδενικά. Να αποδείξετε ότι: “ή ένας από αυτούς θα διαιρείται με το 33 ή το άθροισμα κάποιων από αυτούς θα διαιρείται με το 33”.

Λύση

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι κάθε αριθμός της μορφής $\overbrace{\alpha 000 \dots 000 \alpha}^{2\nu-\text{ψηφία}}$ διαιρείται με το

11. Πράγματι, κάθε αριθμός της παραπάνω μορφής γράφεται;

$$\begin{aligned} \alpha 00 \dots 00 \alpha &= \alpha \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^1 + \dots + 0 \cdot 10^{2\nu} + \alpha \cdot 10^{2\nu+1} = \\ &= \alpha + \alpha \cdot 10^{2\nu+1} = \\ &= \alpha(1 + 10^{2\nu+1}) = \\ &= \alpha(1 + 10)(\underbrace{10^{2\nu} - 10^{2\nu-1} + \dots + 1}_{\kappa}) = 11\alpha \cdot \kappa. \end{aligned}$$

Έστω τώρα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ τρεις οποιοιδήποτε θετικοί ακέραιοι αριθμοί. της μορφής $\overbrace{\alpha 000 \dots 000 \alpha}^{2\nu-\text{ψηφία}}$. Θα αποδείξουμε ότι: “ή ένας από αυτούς θα διαιρείται με το 3 ή το

άθροισμα κάποιων από αυτούς θα διαιρείται με το 3”. (1)

Αν κάποιος από τους αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ διαιρείται με το 3, τότε προφανώς θα ισχύει η πρόταση.

Έστω ότι το 3 δεν διαιρεί κανένα από τους αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Τότε υπάρχουν οι παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:

1) Αν όλοι οι αριθμοί είναι της μορφής $3k + 1$, τότε προφανώς $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3m$

2) Αν όλοι οι αριθμοί είναι της μορφής $3k + 2$, τότε προφανώς $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3n$

Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις ένας τουλάχιστον αριθμός θα είναι της μορφής $3k + 1$ και ένας τουλάχιστον της μορφής $3k + 2$, οπότε το άθροισμα αυτών των δύο αριθμών θα είναι προφανώς πολλαπλάσιο του τρία.

Επειδή καθένας από τους αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ της μορφής $\overbrace{\alpha 00 \dots 00 \alpha}^{2\nu-\text{ψηφία}}$ διαιρείται με το 11, έπεται ότι και το άθροισμα οσωνδήποτε από αυτούς θα διαιρείται με το 11.

Λαμβάνοντας υπόψιν τις προηγούμενες προτάσεις, καταλήγουμε στο ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 4°.

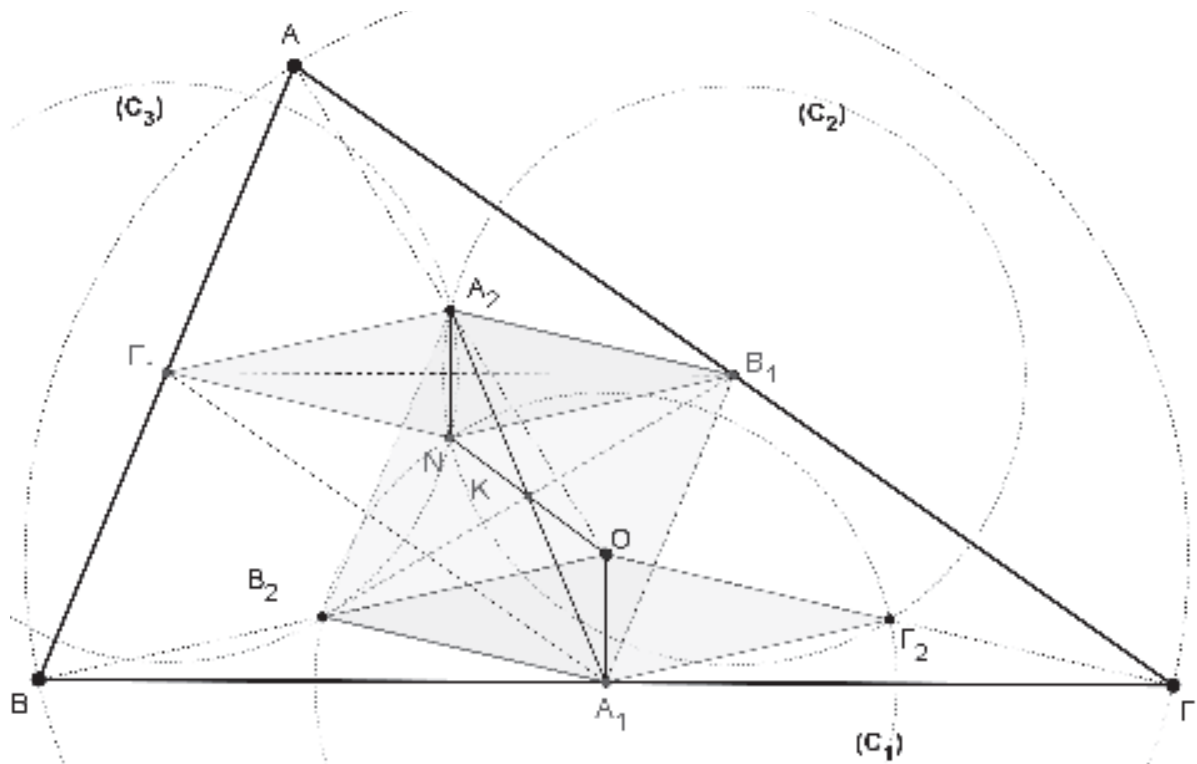
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O, R)$ και έστω A_1, B_1, Γ_1 τα μέσα των πλευρών του $B\Gamma, A\Gamma, AB$ αντίστοιχα. Θεωρούμε τους κύκλους $C_1(A_1, \frac{R}{2})$,

$C_2(B_1, \frac{R}{2})$ και $C_3(\Gamma_1, \frac{R}{2})$. Αποδείξτε ότι οι κύκλοι C_1, C_2, C_3 περνάνε από το ίδιο

σημείο (έστω N) και ότι τα δεύτερα κοινά σημεία τους είναι τα μέσα A_2, B_2, Γ_2 των OA, OB, OG αντίστοιχα. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι οι $A_1A_2, B_1B_2, \Gamma_1\Gamma_2$ και ON περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση

Το τρίγωνο $A_1B_1\Gamma_1$ είναι όμοιο με το τρίγωνο $AB\Gamma$. Ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων είναι $\lambda = \frac{1}{2}$, οπότε ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$ θα έχει ακτίνα $\frac{R}{2}$.



Σχήμα 7

Οι κύκλοι τώρα που έχουν κέντρα τις κορυφές του τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$ και ακτίνα $\frac{R}{2}$ θα περνάνε από το περίκεντρο N του τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$. (Το σημείο N είναι το κέντρο του κύκλου του Euler του τριγώνου $AB\Gamma$)

Αν A_2, B_2, Γ_2 είναι τα μέσα των OA, OB, OG αντίστοιχα, τότε:

$$A_1B_2 = A_1\Gamma_2 = B_1A_2 = B_1\Gamma_2 = \Gamma_1A_2 = \Gamma_1B_2 = \frac{R}{2}.$$

(Τα παραπάνω τμήματα $A_1B_2, A_1\Gamma_2, B_1A_2, B_1\Gamma_2, \Gamma_1A_2, \Gamma_1B_2$ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα των ορθογωνίων τριγώνων $OA_1B, OA_1\Gamma, OB_1A, OB_1\Gamma, OG_1A$ και OG_1B .)

Άρα τα δεύτερα κοινά σημεία των κύκλων $C_1(A_1, \frac{R}{2}), C_2(B_1, \frac{R}{2})$ και $C_3(\Gamma_1, \frac{R}{2})$ είναι τα σημεία A_2, B_2, Γ_2 .

Τα τετράπλευρα $\Gamma_1 N B_1 A_2$ και $O B_2 A_1 \Gamma_2$ είναι ρόμβοι με πλευρές μήκους $\frac{R}{2}$ και οι πλευρές του ενός τετραπλεύρου, είναι παράλληλες με τις πλευρές του άλλου ($A_2 B_1 \parallel B_2 A_1$, $\Gamma_1 A_2 \parallel A_1 \Gamma_2, \dots$).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

Το τετράπλευρο $A_2 O A_1 N$ είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται. Δηλαδή η $A_1 A_2$ περνά από το μέσο K του ON που είναι μέσο και του $A_1 A_2$.

Το τετράπλευρο $\Gamma_1 A_2 \Gamma_2 A_1$ είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται. Δηλαδή η $\Gamma_1 \Gamma_2$ περνά από το μέσο K του $A_1 A_2$ που είναι μέσο και του $\Gamma_1 \Gamma_2$.

Τέλος το τετράπλευρο $B_1 \Gamma_1 B_2 \Gamma_2$ είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται. Δηλαδή η $B_1 B_2$ και περνά από το μέσο K του $\Gamma_1 \Gamma_2$ που είναι μέσο και του $B_1 B_2$.