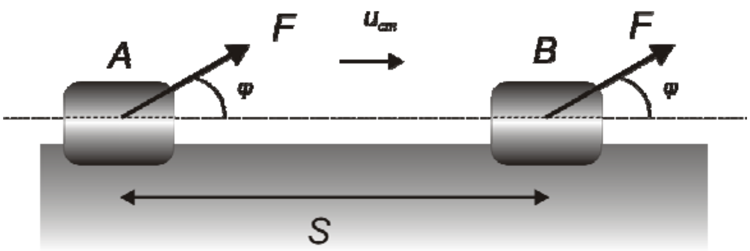
3.5 Έργο - Ενέργεια

Στη συγκεκριμένη ενότητα, θα ασχοληθούμε με το έργο και την μηχανική ενέργεια στην περιστροφική κίνηση, όπως επίσης και με την ορθή διτύπωση των ενεργειακών θεωρημάτων και αρχών (ΘΜΚΕ, ΘΔΜΕ, ΑΔΕ, κλπ) που έχουμε δει παλαιότερα ώστε να περιλαμβάνουν και τις περιπτώσεις της στροφικής και της σύνθετης κίνησης. Ας μην ξεχνάμε ότι τα ενεργειακά θεωρήματα είναι πολύ ισχυρά όπλα για την επίλυση προβλημάτων. Αρχικά όμως θα πρέπει να θυμηθούμε το πώς βρίσκουμε το έργο σε κάποιες συγκεκριμένες περιπτώσεις. Ας τις δούμε:

3.5.1 Έργο Δυνάμεων

⇨ **Έργο σταθερής δύναμης (διανυσματικά) που το σημείο εφαρμογής της μετατοπίζεται ευθύγραμμα:**



Σχήμα 64: Δύναμη μετατοπίζει ευθύγραμμα σώμα

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σώμα και μια δύναμη F που ασκείται σε αυτό υπό τυχαία γωνία φ. Τότε το έργο κατά την μετακίνηση του σώματος από μία θέση Α σε μία θέση Β θα δίνεται από την σχέση:

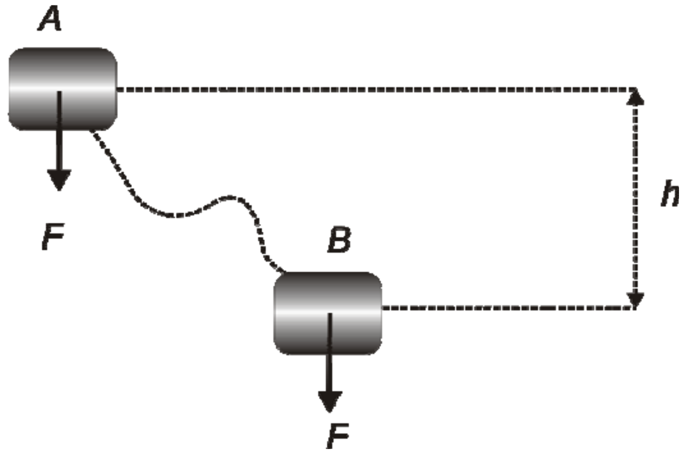
$$\boxed{W_{(A\to B)} = F \cdot S \cdot \sigma\upsilon\nu\phi} \quad (3.27),$$

όπου F είναι το σταθερό μέτρο της δύναμης, S είναι το μέτρο της ευθύγραμμης μετατόπισης του σημείου εφαρμογής της δύναμης και φ η γωνία που σχηματίζει ο φορέας της δύναμης με την ευθύγραμμη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της δύναμης.

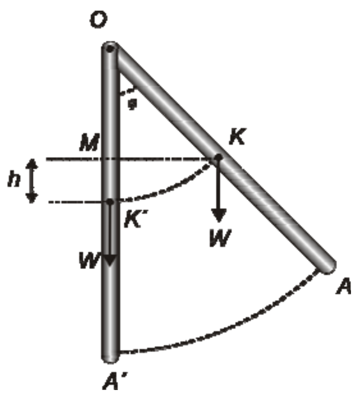
⇨ **Έργο σταθερής δύναμης (διανυσματικά) που το σημείο εφαρμογής της μετατοπίζεται σε καμπύλη τροχιά:**

$$\boxed{W_{(A\to B)} = \pm F \cdot h} \quad (3.28)$$

Όπου F είναι το σταθερό μέτρο της δύναμης και h η προβολή της καμπύλης μετατόπισης του σημείου εφαρμογής στο φορέα της δύναμης ή σε παράλληλο φορέα ενώ το έργο είναι θετικό όταν η $\vec{F}$ βοηθάει την μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της και αρνητικό όταν την εμποδίζει. Η κίνηση αυτή φαίνεται στο σχήμα 65:



Σχήμα 65: Σταθερή δύναμη σε καμπύλη διαδρομή



Σχήμα 66: Έργο Βάρους

☑ **Παράδειγμα:** *Το έργο του βάρους ενός στερεού που κινείται κοντά στην επιφάνεια της Γης.*

Το βάρος της ομογενούς ράβδου, μετακινώντας το σημείο εφαρμογής του από το Κ' στο Κ, παράγει έργο

$$W_{\vec{w}} = -mgh$$

Στην πραγματικότητα βέβαια το βάρος καταναλώνει έργο και αυτή είναι άλλωστε και η φυσική σημασία του (-) στην παραπάνω σχέση. Το μόνο που πρέπει να κάνουμε τώρα είναι με βάση το σχήμα που έχουμε και την γεωμετρία του να βρούμε το h. Έτσι αν ℓ το μήκος της ράβδου, τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο $O\overset{\Delta}{M}K$, θα έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\phi = \frac{(\mathrm{OM})}{(\mathrm{OK})} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\phi = \frac{\frac{\ell}{2} - h}{\frac{\ell}{2}} \Rightarrow \frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\phi = \frac{\ell}{2} - h \Rightarrow$$

$$\boxed{h = \frac{\ell}{2}(1 - \sigma\upsilon\nu\phi)}$$

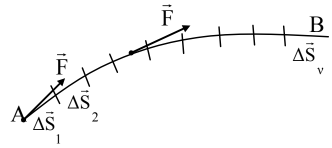
Τώρα λοιπόν που βρήκαμε το h μπορούμε να γράψουμε και την τελική σχέση για το έργο:

$$\boxed{W_{\vec{w}} = -mg\,\frac{\ell}{2}(1 - \sigma\upsilon\nu\phi)} \quad (3.29)$$

όπου βέβαια το (-) σημαίνει το ότι το βάρος εμποδίζει την μετακίνηση της ράβδου κατά την διαδρομή Κ'→Κ.

⇨ Έργο δύναμης σταθερού μέτρου που είναι συνεχώς εφαπτόμενη σε καμπύλη τροχιά

Για να υπολογίσουμε το έργο της δύναμης αυτής θα χωρίσουμε την καμπύλη μας σε στοιχειώδη τμήματα ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_ν, που να είναι τόσο μικρά, ώστε να θεωρούνται ευθύγραμμα, και να βρίσκονται στη διεύθυνση της εφαπτομένης του σημείου εφαρμογής της δύναμης. Τότε, σε κάθε στοιχειώδη μετατόπιση, η $\vec{F}$ παράγει στοιχειώδες έργο:



Σχήμα 67: Καμπύλη διαδρομή

$$\Delta W_1 = F \cdot \Delta S_1 \sigma\upsilon\nu 0^0 = F \cdot \Delta S_1$$
$$\Delta W_2 = F \cdot \Delta S_2 \sigma\upsilon\nu 0^0 = F \cdot \Delta S_2$$

.
.
.

$$\Delta W_\nu = F \cdot \Delta S_\nu \sigma\upsilon\nu 0^0 = F \cdot \Delta S_\nu$$

Άρα το συνολικό έργο που παράγει η $\vec{F}$ κατά τη μετατόπιση Α→Β του σημείου εφαρμογής της είναι θα το βρω αθροίζοντας όλα αυτά τα στοιχειώδη έργα. Να σημειωθεί ότι η γωνία μπορεί να είναι μόνο μηδέν ή 180 λόγω του ότι η δύναμη συνεχώς εφάπτεται στην τροχιά. Έτσι θα έχουμε:

$$W_{\vec{F}(A\to B)} = \Delta W_1 + \Delta W_2 + ... + \Delta W_\nu \Rightarrow$$
$$W_{\vec{F}(A\to B)} = F\left(\Delta S_1 + \Delta S_2 + ... + \Delta S_\nu\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{W_{F(A\to B)} = F(\overset{\frown}{AB})}$$

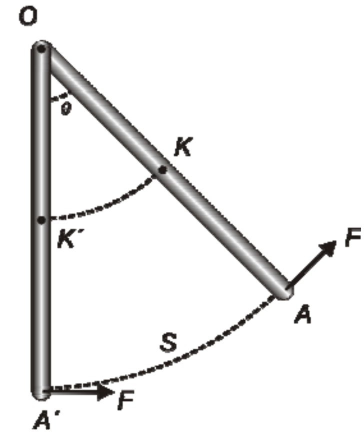
όπου F το σταθερό μέτρο της δύναμης και $(\overset{\frown}{AB}) = S$ το μήκος του διαγραφόμενου τόξου. Άρα:

$$\boxed{W_{(A\to B)} = \pm F \cdot S} \quad (3.30)$$

Φυσικά δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι το $W_{(A\to B)}$ είναι θετικό όταν η $\vec{F}$ ευνοεί τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της (συνθ=1) από το Α στο Β και αρνητικό όταν την εμποδίζει (συνθ=-1).

Παράδειγμα: Έργο σταθερής ροπής

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία ράβδο ΟΑ' (βλέπε σχήμα 68) που έχει μήκος ℓ και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το άκρο της (Ο), ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο κίνησης της ράβδου. Ασκούμε στο άκρο Α' της ράβδου δύναμη $\vec{F}$ που έχει σταθερό μέτρο και είναι διαρκώς κάθετη στη ράβδο.



Σχήμα 68: Έργο σταθερής ροπής

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, όταν η $\vec{F}$ μετακινεί το σημείο εφαρμογής της από το Α' στο Α, παράγει έργο:

$$W_{(A'\to A)} = F \cdot S \text{ , όπου } S = (\overset{\frown}{A'A}) = R\,\theta_{(rad)} \Rightarrow \boxed{S = \ell\theta} \text{ ,}$$

οπότε: $W_{(A'\to A)} = F.\ell.\theta_{(rad)}$

Όμως το γινόμενο $F \cdot \ell$ εκφράζει τη ροπή της $\vec{F}$ ως προς τον άξονα περιστροφής, οπότε:

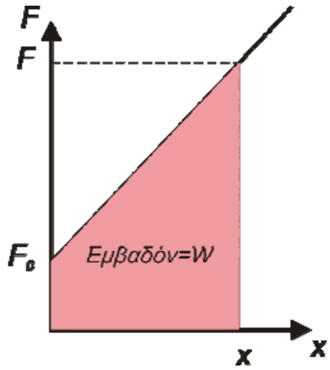
$$F\ell = \tau$$

Άρα η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$\boxed{W_{(A \to A')} = \tau \cdot \theta_{(rad)}} \quad (3.31)$$

➪ **Έργο δύναμης που έχει τη διεύθυνση της ευθύγραμμης μετατόπισης του σημείου εφαρμογής της, αλλά το μέτρο της μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τη θέση του σημείου εφαρμογής της μέσω μιας σχέσης της μορφής F=f(x).**

Σε αυτήν την περίπτωση το έργο είναι θετικό, αν η δύναμη βοηθάει την κίνηση και αρνητικό, αν την εμποδίζει και εκφράζεται αριθμητικά από το εμβαδόν του χωρίου που περιορίζεται από τη γραφική παράσταση δύναμης-μετατόπισης, το τμήμα του άξονα της θέσης που αντιστοιχεί στην δεδομένη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της δύναμης και τις κατακόρυφες που αντιστοιχούν στην αρχική και τελική θέση (εδώ x=0 και x=x_o).



Σχήμα 69: Υπολογισμός έργου μέσω εμβαδού

➪ **Έργο Συντηρητικής δύναμης**

Έστω ότι σε ένα σώμα ασκείται κάποια συντηρητική δύναμη. Το έργο αυτής της δύναμης μπορεί να βρεθεί από την διαφορά των δυναμικών ενεργειών. Ισχύει δηλαδή ότι $W = U_{αρχ} - U_{τελ}$

3.5.2 Έργο και ισχύς κατά την στροφική κίνηση

Ας υποθέσουμε ότι ασκούμε μία εφαπτομενική δύναμη σε έναν τροχό ο οποίος είναι στερεωμένος και μπορεί να κάνει μόνο περιστροφική κίνηση. Τότε η δύναμη αυτή παράγει ένα στοιχειώδες έργο σύμφωνα με την σχέση: $dW = FdS$ όμως δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι $dS = Rd\theta$, όπου dθ είναι η στοιχειώδης γωνιακή μετατόπιση. Άρα θα έχουμε:

$$dW = FdS \Rightarrow dW = FRd\theta$$

Αν θεωρήσουμε την δύναμη σταθερή και εφαπτομενική, τότε θα έχουμε

$$dW = FRd\theta \Rightarrow dW = \tau d\theta \Rightarrow W_{ολ} = \tau \int d\theta \Rightarrow \boxed{W_{ολ} = \tau\theta}$$

(3.31)

Το έργο αυτό είναι το έργο σταθερής ροπής όπου η γωνία είναι μετρημένη σε rad.

Ισχύς στην στροφική κίνηση

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε το παραπάνω στερεό και ότι σε χρόνο dt, το σώμα στρέφεται κατά την απειροστά μικρή γωνία dθ οπότε δύναμη $\vec{F}$ παράγει έργο dW και θα ισχύει: $dW = \tau d\theta$ διαιρώντας τότε με dt προκύπτει:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\tau d\theta}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dW}{dt} = \tau\omega} \quad (3.32)$$

Ο ρυθμός παραγωγής έργου $\frac{dW}{dt}$ ονομάζεται (στιγμιαία) ισχύς P της δύναμης. Στο S.I., όπου η μονάδα της ροπής είναι το 1N·m και η μονάδα της γωνιακής ταχύτητας είναι το 1r/s, η μονάδα της ισχύος είναι το 1W=1Watt.

Παρατηρήσεις

- ☑ Αν τα μεγέθη τ και ω είναι σταθερά, τότε η ισχύς είναι σταθερή ενώ αν ένα τουλάχιστον από τα μεγέθη τ και ω μεταβάλλεται με το χρόνο, τότε η ισχύς που δίνεται από την παραπάνω σχέση είναι η *στιγμιαία ισχύς*.
- ☑ Αν ο ρυθμός παραγωγής έργου από μια δύναμη ή τη ροπή μιας δύναμης είναι σταθερός, τότε η ισχύς P της δύναμης ή της ροπής της δύναμης είναι σταθερή και δίνεται από τη σχέση: $\mathrm{P} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{t}}$, όπου W το έργο που παράγει η δύναμη ή η ροπή της δύναμης σε χρόνο t.
  Στο S.I. μονάδα μέτρησης της ισχύος είναι το 1Watt και ισχύει: $1\mathrm{W} = 1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$.
- ☑ Αν ο ρυθμός παραγωγής έργου δεν είναι σταθερός, τότε χρησιμοποιείται η έννοια της στιγμιαίας ισχύος και η έννοια της μέσης ισχύος.
  Μέση ισχύς $\overline{P}$ μιας δύναμης ή της ροπής μιας δύναμης ονομάζεται το πηλίκο του έργου $\mathrm{W}_{\mathrm{t}_{ολ}}$, το οποίο παράγεται από τη δύναμη ή τη ροπή της δύναμης σε χρόνο $t_{ολ}$, προς το χρόνο $t_{ολ}$. Δηλαδή: $\overline{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{W}_{\mathrm{t}_{ολ}}}{\mathrm{t}_{ολ}}$ (3.33)

Ενεργειακά Θεωρήματα – Αρχές διατήρησης

Πολλά προβλήματα της μηχανικής του στερεού είναι πολύ δύσκολο να λυθούν με την χρήση των νόμων του Νεύτωνα. Τέτοια προβλήματα για παράδειγμα είναι οι περιπτώσεις στις οποίες δεν έχουμε σταθερή γωνιακή επιτάχυνση. Σε αυτές τις περιπτώσεις χρησιμοποιούμε κάποιο ενεργειακό θεώρημα ή την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Ας δούμε όμως πως αυτές οι αρχές προσαρμόζονται στην στροφική κίνηση:

ΘΜΚΕ

Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας κατά την στροφική κίνηση:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{\Sigma\tau} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} I_{\tau\varepsilon\lambda}\omega_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2} I_{\alpha\rho\chi}\omega_{\alpha\rho\chi}^2 = \sum W_\tau} \quad (3.34)$$

Σε αυτή την μορφή θεωρούμε ότι είναι πιθανό να αλλάζει και η ροπή αδράνειας του σώματος. Αυτό δεν συμβαίνει συχνά, θα το συναντήσουμε όμως σε περιπτώσεις ανακατανομής της μάζας όπως αυτές που είδαμε στα προβλήματα της στροφορμής.

Μια ακόμη παρατήρηση που πρέπει να γίνει είναι για τα έργα των ροπών. Γενικά η έννοια του έργου δεν διαχωρίζει τις δυνάμεις από τις ροπές. Το μοναδικό που ενδιαφέρει είναι η ενεργειακή συνεισφορά της κάθε «δράσης» είτε αυτή ονομάζεται δύναμη είτε ροπή. Έτσι είναι λογικό να χρησιμοποιήσουμε αυτήν την δράση η οποία θα μας διευκολύνει περισσότερο. Για παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε την περίπτωση της στροφικής κίνησης μιας αρθρωμένης ράβδου υπό την επίδραση μόνο του βάρους της. Αν και η μοναδική δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος και η κίνηση είναι μόνο στροφική και όχι μεταφορική, στο ΘΜΚΕ θα βάλουμε το έργο του βάρους και όχι το έργο της ροπής του βάρους γιατί δεν είναι σταθερή, ενώ το βάρος είναι σταθερή δύναμη. Βέβαια θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το έργο της ροπής του βάρους αλλά αυτό θα μας δυσκόλευε από μαθηματικής πλευράς.

ΔΙΠΛΟ ΘΜΚΕ

(Περίπτωση σύνθετης κίνησης)

Ένα «λογιστικό κόλπο» το οποίο είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στις περιπτώσεις σύνθετης κίνησης. Έτσι μπορούμε να γράψουμε ένα ΘΜΚΕ μόνο για την μεταφορική κίνηση με τα έργα των δυνάμεων και μόνο και ένα ΘΜΚΕ μόνο για την στροφική κίνηση στην οποία συμμετέχουν τα έργα των ροπών. Αν κάποια δύναμη έχει και ροπή, συμμετέχει και στα δύο ΘΜΚΕ. Στο τέλος προσθέτουμε τα δύο ΘΜΚΕ και οδηγούμαστε σε μια σχέση που θα μας δώσει την λύση. Έτσι θα είναι:

Για την μεταφορική κίνηση θα έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{\Sigma F} \Rightarrow \frac{1}{2} m u_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2} m u_{\alpha\rho\chi}^2 = W_{F_1} + W_{F_2} + \ldots$$

ενώ για την στροφική θα έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{\Sigma F} \Rightarrow \frac{1}{2} I\,\omega_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2} I\,\omega_{\alpha\rho\chi}^2 = W_{\tau_1} + W_{\tau_2} + \ldots$$

και αν προσθέσουμε τις δύο σχέσεις:

$$\frac{1}{2} m u_{\tau\varepsilon\lambda}^2 + \frac{1}{2} I\,\omega_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2} m u_{\alpha\rho\chi}^2 - \frac{1}{2} I\,\omega_{\alpha\rho\chi}^2 = W_{F_1} + W_{\tau_1} + \ldots \quad (3.35)$$

ΑΔΜΕ – ΘΔΜΕ

Αρχή – Θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας

Στην περίπτωση που στο σύστημα ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα – αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας:

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \quad (3.36)$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση θα πρέπει να θεωρήσουμε ένα επίπεδο αναφοράς των δυναμικών ενεργειών, δηλαδή κάποιο επίπεδο στο οποίο η δυναμική ενέργεια είναι μηδενική. Θα πρέπει να είμαστε όμως πάρα πολύ προσεκτικοί. Συνήθως επιλέγουμε ως επίπεδο αναφοράς το κατώτερο σημείο που φτάνει το στερεό, όμως δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι το βάρος το οποίο είναι και η πιο κλασική περίπτωση ασκείται στο κέντρο μάζας του στερεού. Σε μερικές περιπτώσεις όμως το κέντρο μάζας δε βρίσκεται ποτέ στην κατώτερη θέση άρα το στερεό έχει δυναμική ενέργεια την οποία θα πρέπει να τη λάβουμε σοβαρά υπ' όψιν.

ΑΔΕ

Αρχή διατήρησης της ενέργειας

Είναι η πιο γενική αρχή. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε κάθε περίπτωση είτε έχω συντηρητικές δυνάμεις είτε όχι. Η μαθηματική της έκφραση είναι:

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} + E_{προσφ} = K_{τελ} + U_{τελ} + E_{Απωλ} \quad (3.37)$$

όπου Επρος και Εαπωλ η προσφερόμενη και η αποβληθήσα ενέργεια προς το περιβάλλον αντίστοιχα. Οι ενέργειες αυτές εκφράζονται μέσω των έργων των δυνάμεων – ροπών στα σώματα του συστήματος.