

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ(3)

Θέμα Α

A1) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (7 μοναδες)

A2) Να ορίσετε το μέτρο του μιγαδικού $z=a+bi$ (5 μοναδες)

A3) Πότε δύο συναρτήσεις είναι ίσες; (3 μοναδες)

A4) Στις προτάσεις που ακολουθούν να σημειώσετε Σ(για τις σωστές) και Λ(για τις λανθασμένες). (10 μοναδες)

α) Μια συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο ανάμεσα στις ρίζες της

β) $(\eta\mu\chi)' = -\sigma\upsilon\eta\chi$

γ) Ισχύει πάντα ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

δ) Αν $f(x) > g(x)$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

ε) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = -\infty$

Θέμα Β

Έστω z μιγαδικός για τον οποίο ισχύει $z^2 + az + 5 = 0$ (1) και $z_1 = -1 + 2i$ μια ρίζα της προηγούμενης εξίσωσης.

B1) Να βρείτε την δεύτερη λύση (z_2) της εξίσωσης (1) και το a . (5 μοναδες)

B2) $(z_1)^2 + (z_2)^2 = -6$ (3 μοναδες)

$$\text{B3)} \text{ Επίσης ισχύει } |w - z_1| = \left| \frac{z_1 - z_2}{2} \right| \text{ και } |u - z_2| = \left| \frac{z_1 - z_2}{2} \right|$$

B3.1) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του w κ του u (3 μοναδες)

B3.2) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί w, u ώστε $w = u$.

(8 μοναδες)

B3.3) Να βρείτε την μέγιστη τιμή του $|w - u|$ (6 μοναδες)

Θέμα Γ

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ για την οποία ισχύει

$$\frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq \frac{x^2 + 1}{2} \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}$$

Γ1) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$. (6 μοναδες)

Γ2) Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{1}{2} \quad (8 \text{ μοναδες})$$

Γ3) Να βρείτε το όριο:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right) + \eta \mu 2x}{x^2 + \eta \mu x} \quad (11 \text{ μοναδες})$$

Θέμα Δ

Έστω f γνησίως μονότονη συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$$

$$\text{ii)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{2} = 2$$

iii) $4\sqrt{x} - 4 \leq (x - 1)f(x) \leq 2\eta\mu(x - 1)$

Να δείξετε ότι η f :

Δ1) είναι γνησίως αύξουσα. (3 μοναδες)

Δ2) έχει ακριβώς μια ρίζα στο \mathbb{R} . (5 μοναδες)

Δ3) τέμνει την ευθεία $y=0$ με τετμημένη $(0,1)$. (5 μοναδες)

Δ4) Δίνεται ακόμα $g(x) = e^{x+1} + f(x+1)$.

Δ4.1) Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα. (5 μοναδες)

Δ4.2) Να βρείτε το σύνολο τιμών της g στο $\Delta=[-1,0]$. (4 μοναδες)

Δ4.3) Να δείξετε ότι η g τέμνει την ευθεία $y=1$ με τετμημένη $(-1,0)$.

(3 μοναδες)