

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

2009

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

- A. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει ότι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Μονάδες 10

- B. Αν x_1, x_2, \dots, x_k είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n ($k \leq n$), να ορίσετε τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , $i = 1, 2, \dots, k$.

Μονάδες 5

- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α. Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x) + f(x)g(x)$$

Μονάδες 2

- β. Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε ισχύει ότι

$$A - B = A \cap B'$$

Μονάδες 2

- γ. Για τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ ισχύει ότι

$$(\eta\mu x)' = -\sigma\upsilon\nu x$$

Μονάδες 2

- δ. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

Μονάδες 2

- ε. Η μέση τιμή ενός συνόλου n παρατηρήσεων είναι ένα μέτρο θέσης.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές x_i , $i = 1, 2, 3, 4$ μιας μεταβλητής X με αντίστοιχες συχνότητες ν_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Η συχνότητα ν_2 που αντιστοιχεί στην τιμή $x_2 = 3$ είναι άγνωστη. Δίνεται ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι ίση με $\bar{x} = 4$.

x_i	v_i
2	6
3	;
5	3
8	4

- α. Να αποδείξετε ότι $v_2 = 7$. **Μονάδες 9**
- β. Να αποδείξετε ότι η διακύμανση των παρατηρήσεων είναι ίση με 4,9. **Μονάδες 9**
- γ. Να εξετάσετε αν το δείγμα των τιμών της μεταβλητής X είναι ομοιογενές.
Δίνεται ότι $\sqrt{4,9} \approx 2,2$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax - 7$, όπου a πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει

$$2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

- α. Να δείξετε ότι $a = 9$ **Μονάδες 7**
- β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$. **Μονάδες 8**
- γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -3x$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{x}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2$, $x > 0$ όπου λ ένας πραγματικός αριθμός.

- Α.
- α. Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα. **Μονάδες 6**
- β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα. **Μονάδες 6**

B. Θεωρούμε ότι οι τιμές της συνάρτησης $f(2), f(4), f(8), f(3)$ και $f(5)$ είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X .

α. Αν R είναι το εύρος και δ η διάμεσος των παρατηρήσεων, ναδειχθεί ότι

$$R = 3 + \ln \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad \delta = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$$

Μονάδες 7

β. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ ο οποίος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Αν το λ παίρνει τιμές στο δειγματικό χώρο Ω , να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

$$A = \{\lambda \in \Omega \mid R + \delta < -2\}$$

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Θεωρία σελίδα 150 σχολ. βιβλίο.

B. Θεωρία, σελίδα 65 σχολ. βιβλίο.

Γ. $\alpha \rightarrow \Lambda$, $\beta \rightarrow \Sigma$, $\gamma \rightarrow \Lambda$, $\delta \rightarrow \Sigma$, $\varepsilon \rightarrow \Sigma$

ΘΕΜΑ 2ο

α) Είναι

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^4 v_i x_i / v \Rightarrow \bar{x} = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4}{v} \Rightarrow 4 = \frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot v_2 + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 4}{6 + v_2 + 3 + 4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4 = \frac{12 + 3v_2 + 15 + 32}{13 + v_2} \Leftrightarrow 4(13 + v_2) = 59 + 3v_2 \Leftrightarrow 52 + 4v_2 = 59 + 3v_2 \Leftrightarrow v_2 = 7.$$

β) Είναι

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 v_i (x_i - \bar{x})^2}{v} = \frac{v_1 (x_1 - \bar{x})^2 + v_2 (x_2 - \bar{x})^2 + v_3 (x_3 - \bar{x})^2 + v_4 (x_4 - \bar{x})^2}{v} =$$
$$= \frac{6(2-4)^2 + 7(3-4)^2 + 3(5-4)^2 + 4(8-4)^2}{6+7+3+4} = \frac{6 \cdot 4 + 7 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 16}{20} =$$
$$= \frac{24 + 7 + 3 + 64}{20} = \frac{98}{20} = 4,9.$$

γ) Είναι $CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{S^2}}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{4,9}}{4} \approx \frac{2,2}{4} = \frac{22}{40} = \frac{11}{20} = 55\% > 10\%$,

άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ 3ο

α) Είναι $A_f = \mathbb{R}$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως πολυωνυμική.

Είναι:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + \alpha,$$

$$f''(x) = 6x - 12.$$

Έτσι:

$$2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow 2(6x - 12) + 3x^2 - 12x + \alpha + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 12x - 24 - 12x + \alpha + 15 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 9.$$

β) Είναι για $x \neq \pm 1$:

$$\frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \frac{3x^2 - 12x + 9}{x^2 - 1} = \frac{3(x^2 - 4x + 3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x-9}{x+1}.$$

$$\text{Οπότε: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-9}{x+1} = \frac{-6}{2} = -3.$$

γ) Έστω $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής.

Επειδή η εφαπτομένη στο A είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -3x$

$$\Rightarrow \lambda_{\text{εφ}} = -3 \Rightarrow f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 12x_0 + 9 = -3 \Leftrightarrow$$

$$3x_0^2 - 12x_0 + 12 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2.$$

Άρα το σημείο επαφής είναι το $A(2, f(2))$.

Όμως $f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 7 = -5$ οπότε το σημείο επαφής είναι $A(2, -5)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y = f'(2)x + \beta$, δηλ. $y = -3x + \beta$.

Όμως A ανήκει στην εφαπτομένη $\Rightarrow -5 = -3 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y = -3x + 1$.

ΘΕΜΑ 4ο

A. α. Είναι $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{2-x}{2x} = -\frac{x-2}{2x}$.

Με $x > 0$ είναι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 2.$$

Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,2]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$.

β. Η f παρουσιάζει μέγιστη τιμή:

$$f(2) = \ln 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1.$$

B. α. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$ είναι:

$$2 < 3 < 4 < 5 < 8 \Rightarrow f(2) > f(3) > f(4) > f(5) > f(8).$$

Έτσι προκύπτει ότι το εύρος είναι:

$$\begin{aligned} R &= f(2) - f(8) = (\ln 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1) - (\ln 8 - 4 + \lambda^2 - 6\lambda + 2) = \\ &= \ln 2 - \ln 8 + 3 = \ln \frac{1}{4} + 3. \end{aligned}$$

Επίσης, η διάμεσος προκύπτει ότι είναι:

$$f(4) = \ln 4 - 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 2 = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda.$$

β. Είναι $A = \left\{ \lambda \in \Omega \mid 3 + \ln \frac{1}{4} + \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda < -2 \right\} =$
 $= \left\{ \lambda \in \Omega \mid \lambda^2 - 6\lambda + 5 < 0 \right\}.$

Επειδή $\lambda^2 - 6\lambda + 5 < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (1, 5)$, με $\lambda \in \Omega$ είναι

$$A = \{2, 3, 4\}. \text{ Έτσι } P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{100}.$$