

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΑ.Λ. (ΟΜΑΔΑ Α')

2009

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ 1ο

A. Δίνεται συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  ( $A \subseteq \mathbb{R}$ ) και  $x_0 \in A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ ;

Μονάδες 7

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν η τιμή του συντελεστή μεταβλητότητας (μεταβολής) ενός δείγματος παρατηρήσεων είναι μικρότερη του 10%, τότε ο πληθυσμός του δείγματος θεωρείται ομοιογενής.

Μονάδες 3

β.  $(\sin x)' = \eta \mu x$

Μονάδες 3

γ. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (a, b)$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(a, b)$ .

Μονάδες 3

δ.  $\int_a^b c \, dx = c(b-a)$ , όπου  $c$  σταθερά.

Μονάδες 3

Γ. Αν οι συναρτήσεις  $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους  $A$ , τότε να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α.  $(f \cdot g)'(x) = \dots\dots\dots$

Μονάδες 2

β.  $(c \cdot f)'(x) = \dots\dots\dots$  όπου  $c$  σταθερά.

Μονάδες 2

γ.  $\int_a^b \frac{1}{x} \, dx = \dots\dots\dots$  με  $b > a > 0$

Μονάδες 2

## ΘΕΜΑ 2ο

Ρωτήθηκαν 25 μαθητές μιας τάξης ενός Λυκείου πόσα λογοτεχνικά βιβλία διάβασαν την περσινή χρονιά. Οι απαντήσεις τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Βιβλία $x_i$	Μαθητές $v_i$	Σχετική Συχνότητα $f_i \%$	Αθροιστική Συχνότητα	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα %	$x_i v_i$
1	4				
2					
3	8				
4	7				
Αθροίσματα					

**A.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

**Μονάδες 10**

**B.** Να υπολογίσετε τη διάμεσο.

**Μονάδες 5**

**Γ.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή.

**Μονάδες 5**

**Δ.** Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που διάβασε τουλάχιστον δύο (2) βιβλία;

**Μονάδες 5**

## ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = -x^2 + 6x + 8$

**A.** Να υπολογίσετε την  $f'(x)$

**Μονάδες 4**

**B.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία.

**Μονάδες 8**

**Γ.** Για ποια τιμή του  $x$  η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο; Να βρείτε το είδος του ακροτάτου.

**Μονάδες 6**

**Δ.** Να υπολογίσετε το  $\int_0^3 f(x) dx$

**Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = x^3 + 4x + 2ae^x$

$$\text{όπου } a = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$$

**A.** Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού  $a$ .

**Μονάδες 5**

**B.** Για  $a = 1$

**α.** Να υπολογίσετε την  $f'(x)$

**Μονάδες 5**

**β.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$

**Μονάδες 5**

**γ.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x=2$  και  $x=4$ , είναι ίσο με  $84 + 2e^4 - 2e^2$  τ.μ.

**Μονάδες 10**

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ 1ο

A) Θεωρία: Ορισμός σελ. 134 σχολικού βιβλίου.

B)

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
$\Sigma$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Sigma$

Γ) α)  $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ .

β)  $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$ .

γ)  $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_{\alpha}^{\beta} = \ln \beta - \ln \alpha = \ln \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)$ .

### ΘΕΜΑ 2ο

A)

Βιβλία $x_i$	Μαθητές $v_i$	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα %	$x_i v_i$
1	4	16	4	16	4
2	6	24	10	40	12
3	8	32	18	72	24
4	7	28	25	100	28
Αθροίσματα	25	100			68

B) Από τον πίνακα προκύπτει ότι η διάμεσος τιμή (13η τιμή σε αύξουσα ταξινόμηση) είναι  $\delta = 3$ .

Γ)  $\bar{x} = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4}{v_1 + v_2 + v_3 + v_4} = \frac{68}{25}$ .

Δ) Το ποσοστό των μαθητών που διάβασε τουλάχιστον 2 βιβλία είναι  $(24 + 32 + 28)\% = 84\%$

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Α) Είναι  $f'(x) = (-x^2 + 6x + 8)' = -2x + 6$ .

Β) Έχουμε ότι  $f'(x) = -2x + 6$  και τον ακόλουθο πίνακα μεταβολών.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f'	+		-
f	↗		↘

Γ) Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα μεταβολών η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 = 3$  τοπικό μέγιστο.

Δ) Είναι

$$\begin{aligned} \int_0^3 (-x^2 + 6x + 8) dx &= \left[ -\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} + 8x \right]_0^3 = \\ &= \left[ -\frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x \right]_0^3 = \\ &= \left[ -\frac{3^3}{3} + 3 \cdot 3^2 + 24 \right] - [0] = \\ &= [-9 + 27 + 24] = 42. \end{aligned}$$

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Α) Είναι:  $a = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} (x+2) = 1$ .

Β)

α) Για  $a = 1$  είναι  $f(x) = x^3 + 4x + 2e^x$ .  
Έτσι  $f'(x) = 3x^2 + 4 + 2e^x$ .

β) Επειδή είναι  $3x^2 + 4 > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , καθώς επίσης και  $2e^x > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , προκύπτει ότι  $f'(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

γ) Επειδή  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  θα έχουμε ότι:

$$\text{Αν } 2 \leq x \leq 4 \Rightarrow$$

$$f(2) \leq f(x) \leq f(4) \Rightarrow$$

$$2^3 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot e^2 \leq f(x) \leq 4^3 + 4 \cdot 4 + 2e^4 \Rightarrow$$

$$0 < 16 + 2e^2 \leq f(x) \leq 80 + 2e^4.$$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\int_2^4 f(x) dx = \int_2^4 (x^3 + 4x + 2e^x) dx = \left[ \frac{x^4}{4} + 2x^2 + 2e^x \right]_2^4 =$$

$$= (4^3 + 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot e^4) - (4 + 2 \cdot 2^2 + 2e^2) =$$

$$= 84 + 2e^4 - 2e^2 \text{ τ.μ.}$$