ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΤΕΕ
2006

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνονται 5 παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ:

$$16,\ 14,\ 22,\ 18,\ 20+\alpha, \quad \text{όπου } \alpha \in \Re .$$

Αν ο συντελεστής μεταβλητότητας (CV) των παρατηρήσεων αυτών είναι 20% και η τυπική απόκλισή τους (s) είναι 4, τότε:

α) Να δείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι $\overline{x} = 20$.

Μονάδες 7

β) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α.

Μονάδες 10

γ) Για την τιμή του α που υπολογίσατε στο ερώτημα β, να βρείτε τη διάμεσο του δείγματος.

Μονάδες 5

δ) Είναι το δείγμα ομοιογενές ή όχι και γιατί.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = 4x^3 - 12x + 2006, \quad x \in \Re .$$

α) Να βρεθεί η παράγουσα της f.

Μονάδες 8

β) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της f για κάθε $x \in \Re$.

Μονάδες 8

γ) Να εξεταστεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί και συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}\cdot\alpha, & \text{αν } x>2 \\ 4, & \text{αν } x=2 \\ \alpha x+\beta, & \text{αν } x<2 \end{cases}.$$

α) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

Μονάδες 8

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

Μονάδες 5

γ) Να υπολογίσετε τα α, β ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

Μονάδες 8

δ) Για τις τιμές των α και β που βρήκατε στο ερώτημα γ, να υπολογίσετε τις τιμές f(0) και f(3).

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 4ο

Μια βιοτεχνία, μεταξύ άλλων, κατασκευάζει κεραμικά πλακίδια σε σχήμα τριγώνου. Σε κάθε πλακίδιο το άθροισμα της βάσης x και του ύψους που αντιστοιχεί στη βάση αυτή είναι σταθερό και ισούται με 50cm.

α) Να δείξετε ότι το εμβαδό Ε της επιφάνειας κάθε τριγωνικού πλακιδίου δίνεται συναρτήσει του x από τον τύπο

$$E(x)=\frac{1}{2}x(50-x),\quad 0<x<50.$$

Μονάδες 8

β) Για ποια τιμή του x το εμβαδό Ε(x) γίνεται μέγιστο.

Μονάδες 12

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του Ε(x).

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α) Είναι $CV = \frac{s}{\overline{x}} \Leftrightarrow \overline{x} = \frac{s}{CV}$. Οπότε $\overline{x} = \frac{4}{0,2} = 20$.

β) $\overline{x} = 20 \Leftrightarrow \frac{16+14+22+18+20+\alpha}{5} = 20 \Leftrightarrow \frac{90+\alpha}{5} = 20 \Leftrightarrow \alpha = 10$.

γ) Για α = 10, οι παρατηρήσεις διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά είναι:

14, 16, 18, 22, 30.

Επειδή το πλήθος τους είναι 5, διάμεσος είναι η 3η παρατήρηση. Έτσι δ = 18.

δ) Ο συντελεστής μεταβλητότητας CV = 20% είναι μεγαλύτερος από 10%, άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ 2ο

α) Η παράγουσα της $f(x) = 4x^3 – 12x + 2006$ είναι

$F(x) = x^4 – 6x^2 + 2006x + C$ με $C \in \Re$.

β) Ο ρυθμός μεταβολής της f για κάθε $x \in \Re$ είναι
$f'(x) = 12x^2 – 12$.

γ) Εξισώνουμε την $f'(x)$ με το μηδέν και βρίσκουμε

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 – 12 = 0 \Leftrightarrow 12(x^2 – 1) = 0 \Leftrightarrow 12(x – 1)(x + 1) = 0$

οπότε x = 1 ή x = –1.

Κατασκευάζουμε πίνακα μεταβολών

x	-∞		-1		1		+∞
f′		+	0	-	0	+	
f		↗		↘		↗	

Επομένως η f είναι

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 1]$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 3ο

α) Είναι

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left[\frac{x^2-4}{x-2}\cdot\alpha\right] = \alpha\cdot\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x-2} = \alpha\cdot\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} =$$
$$= \alpha\lim_{x\to 2^+}(x+2) = 4\alpha.$$

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(\alpha x+\beta) = 2\alpha+\beta$.

γ) Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$.

Δηλαδή $2\alpha+\beta = 4\alpha = 4$ οπότε

$$\left.\begin{matrix}2\alpha+\beta=4\\ 4\alpha=4\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}2\alpha+\beta=4\\ \alpha=1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}2\alpha+\beta=4\\ \alpha=1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\beta=2\\ \alpha=1\end{matrix}\right\}.$$

δ) Για τις τιμές $\alpha = 1$ και $\beta = 2$ ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = \begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}\cdot 1 & \text{αν } x>2\\ 4 & \text{αν } x=2\\ x+2 & \text{αν } x<2\end{cases} = \begin{cases}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}\cdot 1 & \text{αν } x>2\\ 4 & \text{αν } x=2\\ x+2 & \text{αν } x<2\end{cases} =$$

$$= \begin{cases}(x+2) & \text{αν } x\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)\\ 4 & \text{αν } x=2.\end{cases}$$

Οπότε

$f(0) = (0+2) = 2$ και
$f(3) = (3+2) = 5$.

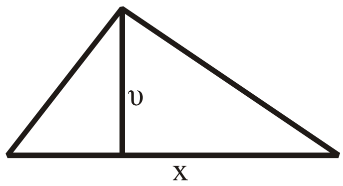
ΘΕΜΑ 4ο

α) Επειδή το άθροισμα της βάσης x και του αντίστοιχου ύψους υ είναι σταθερό και ίσο με 50cm έχουμε:

υ + x = 50.

Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου είναι

$$E = \frac{1}{2} x \cdot υ = \frac{1}{2} x \cdot (50 - x) \quad \text{με} \quad 0 < x < 50.$$



β) Είναι $E'(x) = \left[\frac{1}{2}(50x - x^2)\right]' = \frac{1}{2}(50 - 2x) = 25 - x.$

Λύνουμε την εξίσωση: $E'(x) = 0 \Leftrightarrow 25 - x = 0$ και βρίσκουμε x = 25 cm.

Κατασκευάζουμε πίνακα μεταβολών.

x	0		25		50
E′		+	0	-	
E		↗		↘	

Η τιμή λοιπόν για την οποία το εμβαδόν Ε(x) παρουσιάζει μέγιστο είναι η x = 25.

γ) Για την τιμή x = 25 η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι:

$$E(25) = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (50 - 25) = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 25 = \frac{625}{2}\ \text{cm}^2.$$