

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β ' ΚΥΚΛΟΥ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΤΕΕ 2004**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ****ΘΕΜΑ 1ο**

Εξετάσαμε δείγμα 25 οικογενειών μιας πόλης, ως προς τον αριθμό των παιδιών τους. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

| Αριθμός παιδιών | Συχνότητα v_i | Αθροιστική Συχνότητα | Σχ. Συχνότητα (%) $f_i \%$ |
|-----------------|--------------------|-------------------------|-------------------------------|
| 0 | 4 | | |
| 1 | | | |
| 2 | 5 | | |
| 3 | 4 | | |
| 4 | 3 | | |
| 5 | 2 | | |
| Αθροίσματα | | | |

α) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 5

β) Να βρείτε την επικρατούσα τιμή.

Μονάδες 5

γ) Να βρείτε τη διάμεσο.

Μονάδες 5

δ) Τι ποσοτό οικογενειών έχει τρία παιδιά;

Μονάδες 5

ε) Πόσες οικογένειες έχουν μέχρι και δύο παιδιά;

Μονάδες 5**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x-18 & x > 9 \\ \sqrt{x-3} & x \leq 9 \end{cases}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 9^+} f(x)$.

Μονάδες 12

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 9^-} f(x)$.

Μονάδες 5

γ) Να βρείτε το λ , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 9$.

Μονάδες 8**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + ax + \beta$ με $a, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

β) Αν $f'(1) = 0$ και $f(2) = 5$, να βρείτε τα a και β .

Μονάδες 10

γ) Για τις τιμές των a και β που βρήκατε στο ερώτημα (β), να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Το άθροισμα του μήκους και του πλάτους ενός οικοπέδου, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, είναι 200 μέτρα. Αν το μήκος του είναι x μέτρα:

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = -x^2 + 200x.$$

Μονάδες 5

β) Για ποιά τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο;

Μονάδες 10

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του οικοπέδου.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α)

| Αριθμός παιδιών | Συχνότητα v_i | Αθροιστική Συχνότητα | Σχ. Συχνότητα (%) f_i |
|-----------------|--------------------|-------------------------|----------------------------|
| 0 | 4 | 4 | 16 |
| 1 | 7 | 11 | 28 |
| 2 | 5 | 16 | 20 |
| 3 | 4 | 20 | 16 |
| 4 | 3 | 23 | 12 |
| 5 | 2 | 25 | 8 |
| Αθροίσματα | 25 | | 100 |

β) Η επικρατούσα τιμή είναι 1 αφού έχει τη μεγαλύτερη συχνότητα.

γ) Αφού το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 25 διάμεσος είναι η 13η παρατήρηση δηλ. η 2.

δ) Τρία παιδιά έχουν 16% των οικογενειών.

ε) Μέχρι και δύο παιδιά έχουν $4 + 7 + 5 = 16$ οικογένειες.

ΘΕΜΑ 2ο

α) Έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 9^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{2x-18}{\sqrt{3}-3} = \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{(2x-18)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{2(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x})^2-3^2} = \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{2(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9} = \lim_{x \rightarrow 9^+} 2 \cdot (\sqrt{x}+3) = \\ &= 2(\sqrt{9}+9) = 2(3+3) = 12\end{aligned}$$

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 9^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9^-} (\lambda x + 3) = 9\lambda + 3$.

γ) Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 9$ αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow 9^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9^+} f(x) = f(9)$$

δηλαδή $9\lambda + 3 = 12 = 9\lambda + 3$ ή $9\lambda + 3 = 12$ ή $9\lambda = 9$.

Άρα $\lambda = 1$.

ΘΕΜΑ 3ο

α) Η συνάρτηση f ως πολυωνυμική είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σ' όλο το \mathbb{R} , με παράγωγο

$$f'(x) = (2x^3 - 9x^2 + ax + \beta)' = 6x^2 - 18x + a.$$

β)

- Επειδή $f'(1) = 0$, έχουμε

$$6 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 + a = 0 \quad \text{ή} \quad 6 - 18 + a = 0 \quad \text{ή} \quad a = 18 - 6.$$

Άρα $a = 12$.

Για την τιμή $a = 12$ ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + \beta$$

- Επειδή τώρα είναι $f(2) = 5$, έχουμε

$$2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + \beta = 5 \quad \text{ή} \quad 16 - 36 + 24 + \beta = 5 \quad \text{ή} \quad \beta = 5 - 16 + 36 - 24$$

Άρα $\beta = 1$.

γ) Για τις τιμές $a = 12$ και $\beta = 1$ ο τύπος της $f(x)$ γράφεται

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 12x + 1.$$

Οπότε

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x - 1)(x - 2).$$

Από την εξίσωση $f'(x) = 0$ έχουμε $6(x - 1)(x - 2) = 0$

Άρα $x = 1$ ή $x = 2$

Κατασκευάζουμε πίνακα μεταβολών

| | | | | | |
|--------------|-----------|---|---|-----------|---|
| x | $-\infty$ | 1 | 2 | $+\infty$ | |
| f'(x) | + | ○ | - | ○ | + |
| f(x) | | ↗ | ↘ | ↗ | |

Επομένως η f είναι

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 2]$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 4ο

α) Αφού το άθροισμα του μήκους και του πλάτους του οικοπέδου είναι 200 μέτρα και με δεδομένο ότι το μήκος είναι x μέτρα, προκύπτει ότι το πλάτος θα ήταν $(200 - x)$ μέτρα. Επομένως, το εμβαδόν θα είναι:

$$E(x) = x(200 - x) = -x^2 + 200x.$$

β) Παραγωγίζοντας την $E(x)$ έχουμε:

$$E'(x) = -2x + 200 = -2(x - 100), \quad 0 < x < 200.$$

Είναι:

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 100$$

$$E'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 100$$

$$E'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 100 < 200$$

Η $E(x)$ επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,100]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[100,200)$. Άρα γίνεται μέγιστη όταν $x = 100$ μέτρα.

γ) Η μέγιστη τιμή του $E(x)$ είναι:

$$E(100) = -100^2 + 200 \cdot 100 = 20000 - 10000 = 10000 \text{ τ.μ.}$$