ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΚΥΚΛΟΥ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΤΕΕ 2002

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Οι βαθμοί των 11 μαθητών μιας τάξης ενός Τ.Ε.Ε. σε ένα μάθημα είναι:

12, 12, 9, 15, 12, 16, 17, 7, 19, 18, 17.

Για τα δεδομένα αυτά:

α. Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων.

Μονάδες 5

β. Να βρείτε τη μέση τιμή.

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε την επικρατούσα τιμή.

Μονάδες 5

δ. Να βρείτε τη διάμεσο.

Μονάδες 5

ε. Να βρείτε τη διακύμανση.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\ln 2 \ .$$

α. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε τις τιμές $f'(0)$ και $f'(1)$.

Μονάδες 5

γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda x^2-1, & x\geq 1\\ x+2, & x<1\end{cases}$$

όπου λ πραγματικός αριθμός.

α. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

Μονάδες 10

β. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

Μονάδες 10

γ. Να υπολογίσετε το λ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
με $f(x)=\lambda x^3-x$ όπου λ πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1.$$

α. Να βρείτε την τιμή του λ .

Μονάδες 10

β. Για την τιμή του λ που βρήκατε, να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α. Ο πίνακας συχνοτήτων είναι:

x_i	v_i	$v_i x_i$
7	1	7
9	1	9
12	3	36
15	1	15
16	1	16
17	2	34
18	1	18
19	1	19
Σύνολο	11	154

β. Η μέση τιμή $\bar{x}$ είναι $\bar{x} = \frac{154}{11} = 14$

γ. Η επικρατούσα τιμή είναι το 12 αφού έχει τη μεγαλύτερη συχνότητα: 3

δ. Θέτοντας σε αύξουσα σειρά τα δεδομένα έχουμε:

7 9 12 12 12 $\underline{15}$ 16 17 17 18 19

Η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση, άρα: δ = 15

ε. Έχουμε:

$$s^2 = \frac{1}{11}[(7-14)^2+(9-14)^2+3(12-14)^2+(15-14)^2+(16-14)^2+$$
$$+2(17-14)^2+(18-14)^2+(19-14)^2]=$$

$$=\frac{1}{11}(7^2+5^2+3\cdot 2^2+1^2+2^2+2\cdot 3^2+4^2+5^2)=$$

$$=\frac{1}{11}(49+25+12+1+4+18+16+25)=\frac{150}{11}\approx 13{,}6$$

ΘΕΜΑ 2ο

α. Η f ως πολυωνυμική είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R.

Είναι:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \ell n2\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}(x^3)' - \frac{1}{2}(x^2)' + (\ell n2)' =$$

$$= \frac{1}{3}3x^2 - \frac{1}{2}2x + 0 = x^2 - x$$

β. $f'(0) = 0^2 - 0 = 0$
$f'(1) = 1^2 - 1 = 0$

γ. $f'(x) = x\cdot(x-1)$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ή $x > 1$
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$
Έτσι προκύπτει ο πίνακας προσήμων της f':

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		+	0	-	0	+	

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0]$, $[1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Είναι: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (\lambda x^2 - 1) = \lambda - 1$

β. Είναι: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x + 2) = 3$

γ. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, αν και μόνον αν

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

οπότε: $3 = \lambda - 1 = \lambda - 1$ ή
$\lambda - 1 = 3.$
Άρα $\lambda = 4.$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Επειδή είναι: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

έχουμε ότι $\lim\limits_{x \to 1} (\lambda x^3 - x) = 1$

οπότε λ - 1 = 1.

Άρα λ = 2.

β. Για την τιμή λ = 2 έχουμε f(x) = $2x^3$ - x.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο IR ως πολυωνυμική με

f΄(x) = ($2x^3$ - x)΄ = $6x^2$ - 1.

γ. Είναι: $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (\lambda x^3 - x)dx = \lambda \int_0^1 x^3 dx - \int_0^1 xdx =$

$= \lambda \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \lambda \left(\frac{1}{4} - 0 \right) - (\frac{1}{2} - 0) = \frac{\lambda}{4} - \frac{1}{2}.$

Επομένως η τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^1 f(x)dx$ για λ = 2 είναι:

$\frac{2}{4} - \frac{1}{2} = 0$.