Ορισμοί

- ***Μιγαδικός αριθμός*** λέγεται η έκφραση $\alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in IR$.
- ***Φανταστικός αριθμός*** λέγεται η έκφραση βi, με $\beta \in IR$.
- Αν $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in IR$, το α λέγεται ***πραγματικό μέρος του z***.
- Αν $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in IR$, το β λέγεται ***φανταστικό μέρος του z***.
- Οι μιγαδικοί $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ λέγονται ***ίσοι μιγαδικοί***, αν και μόνο αν $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$.
- ***Εικόνα του μιγαδικού α + βi***, $\alpha, \beta \in IR$, λέγεται το σημείο $M(\alpha, \beta)$.
- ***Μιγαδικό επίπεδο*** λέγεται το καρτεσιανό επίπεδο με σημεία που είναι εικόνες μιγαδικών αριθμών.
- ***Πραγματικός άξονας*** λέγεται ο άξονας $x'x$ του μιγαδικού επιπέδου.
- ***Φανταστικός άξονας*** λέγεται ο άξονας $y'y$ του μιγαδικού επιπέδου
- ***Συζυγής του α + βi***, $\alpha, \beta \in IR$, λέγεται ο $\alpha - \beta i$.
- ***Συζυγείς μιγαδικοί*** λέγονται οι μιγαδικοί $\alpha + \beta i$ και $\alpha - \beta i$, $\alpha, \beta \in IR$.
- ***Μέτρο του μιγαδικού z = x + yi***, που έχει εικόνα το σημείο $M(x, y)$, λέγεται η απόσταση του M από την αρχή των αξόνων O, δηλαδή $|z| = |\vec{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- ***Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών*** είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

- ***Πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α ⊆ IR***, λέγεται μια διαδικασία, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα και μόνο πραγματικό αριθμό y.
- Οι συναρτήσεις f, g λέγονται ***ίσες συναρτήσεις***, όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in A$.
- ***Σύνθεση της συνάρτησης f με τη συνάρτηση g*** λέγεται η συνάρτηση gof με τύπο $(gof)(x) = g(f(x))$ και πεδίο ορισμού $D_{gof} = \{x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_g\}$.
- Μια συνάρτηση f λέγεται ***γνησίως αύξουσα*** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- Μια συνάρτηση f λέγεται ***γνησίως φθίνουσα*** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.
- Μια συνάρτηση f λέγεται ***γνησίως μονότονη*** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι γνησίως αύξουσα στο Δ ή γνησίως φθίνουσα στο Δ.

- Μια συνάρτηση f λέγεται ***αύξουσα*** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \le f(x_2)$.
- Μια συνάρτηση f λέγεται ***φθίνουσα*** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \ge f(x_2)$.
- Μια συνάρτηση f με πεδίου ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει ***ολικό μέγιστο*** στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in A$.
- Μια συνάρτηση f με πεδίου ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει ***ολικό ελάχιστο*** στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \ge f(x_0)$, για κάθε $x \in A$.
- ***Ολικά ακρότατα*** μιας συνάρτησης f λέγονται το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο.
- Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, λέγεται ***συνάρτηση 1 – 1***, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$, ισχύει : αν $x_1 \ne x_2$ τότε $f(x_1) \ne f(x_2)$.
- Μια συνάρτηση f λέγεται ***συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της***, όταν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Μια συνάρτηση f λέγεται ***συνεχής στο πεδίου ορισμού της***, όταν είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της.
- Μια συνάρτηση f λέγεται ***συνεχής στο ανοικτό διάστημα (α , β)***, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α , β).
- Μια συνάρτηση f λέγεται ***συνεχής στο κλειστό διάστημα [α , β]***, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α , β) και επιπλέον $\lim\limits_{x\to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to \beta^-} f(x) = f(\beta)$.

- ***Συντελεστής διεύθυνσης*** της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(x_0 , f(x_0))$, λέγεται το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, αρκεί να υπάρχει και να είναι πραγματικός αριθμός.
- ***Εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(x_0 , f(x_0))$***, λέγεται η ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης
$$\lambda = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

- Μια ***συνάρτηση*** f λέμε ότι είναι ***παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της***, αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.
- ***Παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της*** λέγεται το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, αρκεί να υπάρχει και να είναι πραγματικός αριθμός.
- ***Στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0***, λέγεται η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = S(t)$, τη χρονική στιγμή t_0, δηλαδή $υ(t_0) = S'(t_0)$.
- ***Επιτάχυνση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0***, λέγεται η παράγωγος της ταχύτητας $υ(t) = S'(t)$, τη χρονική στιγμή t_0, δηλαδή $α(t_0) = υ'(t_0) = S''(t_0)$.
- Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε η ***εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$*** είναι : $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.
- ***Κλίση της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$***, λέγεται η $f'(x_0)$.
- ***Κλίση της f στο x_0***, λέγεται η $f'(x_0)$.
- Αν $y = f(x)$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0, τότε ***ρυθμός μεταβολής του μεγέθους y ως προς το μέγεθος x, στο σημείο x_0***, λέγεται η $f'(x_0)$.
- Αν K είναι η συνάρτηση κόστους, τότε ***οριακό κόστος*** λέγεται ο ρυθμός μεταβολής του κόστους $K'(x)$.
- Αν E είναι η συνάρτηση είσπραξης, τότε ***οριακή είσπραξη*** λέγεται ο ρυθμός μεταβολής της είσπραξης $E'(x)$.
- Αν P είναι η συνάρτηση κέρδους, τότε ***οριακό κέρδος*** λέγεται ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους $P'(x)$.
- Μια συνάρτηση f με πεδίου ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει ***τοπικό μέγιστο*** στο $x_0 \in A$, όταν υπάρχει $δ > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - δ, x_0 + δ)$.
- Μια συνάρτηση f με πεδίου ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει ***τοπικό ελάχιστο*** στο $x_0 \in A$, όταν υπάρχει $δ > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \ge f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - δ, x_0 + δ)$.
- Οι ***πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f*** σ' ένα διάστημα Δ είναι :
  - τα εσωτερικά σημεία του Δ που η παράγωγος μηδενίζεται
  - τα εσωτερικά σημεία του Δ που η f δεν παραγωγίζεται
  - τα άκρα του Δ, εφόσον ανήκουν στο D_f

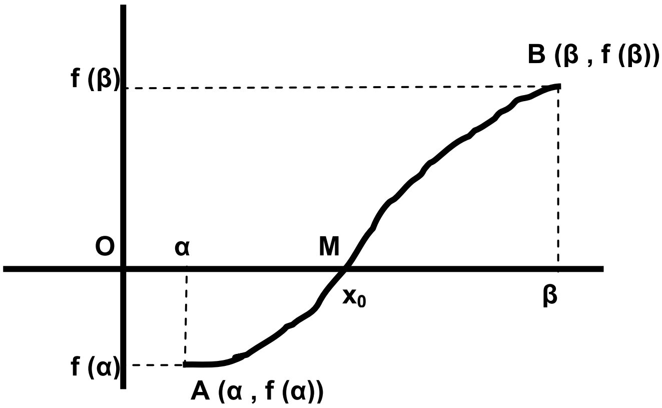
- ***Κρίσιμα σημεία*** μιας συνάρτησης f στο διάστημα Δ, είναι τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με μηδέν.
- Η συνάρτηση f ***στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω σ' ένα διάστημα Δ*** ή ***είναι κυρτή σ' ένα διάστημα Δ***, όταν :
  - η f είναι συνεχής στο Δ
  - η f είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ
  - η f΄ είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ
- Η συνάρτηση f ***στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω σ' ένα διάστημα Δ*** ή ***είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ***, όταν :
  - η f είναι συνεχής στο Δ
  - η f είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ
  - η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ
- Το σημείο $A(x_0, f(x_0))$, με $x_0 \in (\alpha, \beta)$, λέγεται ***σημείο καμπής της C_f***, όταν :
  - η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντίστροφα
  - υπάρχει εφαπτομένη της C_f στο Α
- Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι :
  - τα εσωτερικά σημεία του Δ που η f΄΄ μηδενίζεται
  - τα εσωτερικά σημεία του Δ που η f΄΄ δεν ορίζεται
- ***Κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f***, λέγεται η ευθεία $x = x_0$ αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.
- ***Οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$)***, λέγεται η ευθεία $y = \ell$, αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (αντίστοιχα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$).
- ***Πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$)***, λέγεται η ευθεία $y = \lambda x + \beta$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$, αν $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - (\lambda x + \beta)\right] = 0$ (αντίστοιχα $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x) - (\lambda x + \beta)\right] = 0$).

- ***Αρχική συνάρτηση*** ή ***παράγουσα μιας συνάρτησης f*** που είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ, λέγεται κάθε συνάρτηση F, που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.
- ***Αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f σε διάστημα Δ***, λέγεται το σύνολο όλων των παραγουσών της συνάρτησης f στο Δ και συμβολίζεται με $\int f(x)\,dx$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΡΜΗΝΕΙΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ

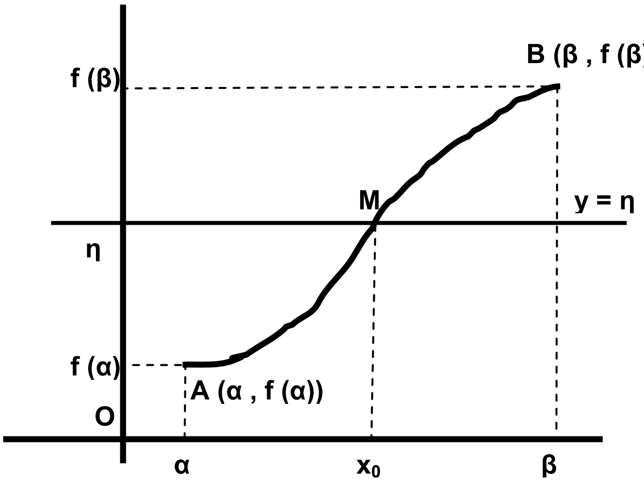
Γεωμετρική ερμηνεία Θ. Bolzano:

Αν η f είναι συνεχής στο [α , β] και τα σημεία Α (α , f (α)) και Β (β , f (β)) βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x΄x, τότε η C_f τέμνει τον άξονα x΄x σ' ένα τουλάχιστον σημείο Μ (x_0, 0), με τετμημένη $x_0 \in (α , β)$.



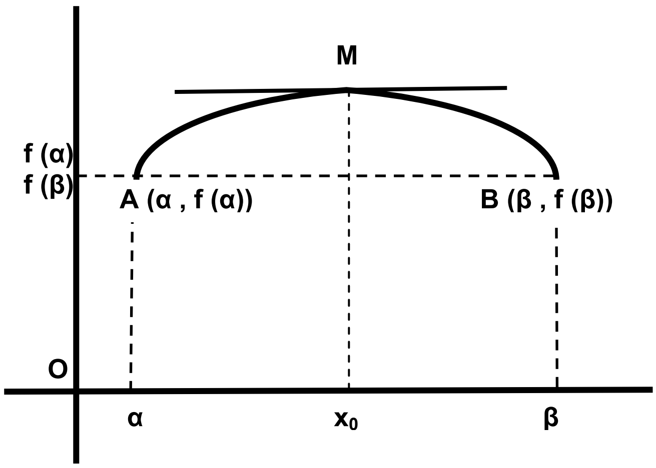
Γεωμετρική ερμηνεία Θ. ενδιαμέσων τιμών:

Αν η f είναι συνεχής στο [α , β] και τα σημεία Α (α , f (α)) και Β (β , f (β)) βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας y = η, τότε η C_f τέμνει την ευθεία y = η σ' ένα τουλάχιστον σημείο Μ (x_0, η), με τετμημένη $x_0 \in (α , β)$.



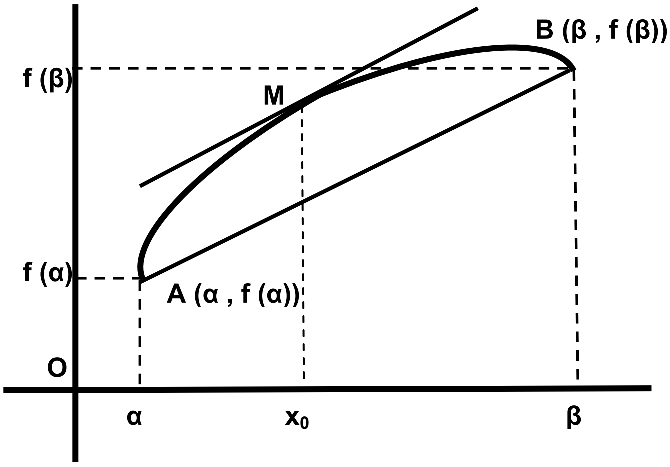
Γεωμετρική ερμηνεία Θ. Rolle:

Αν η C_f είναι μια συνεχής γραμμή από το Α (α , f (α)) στο Β (β, f (β)), η f είναι παραγωγίσιμη στο (α , β) και το ευθύγραμμο τμήμα είναι παράλληλο στον άξονα x΄x, τότε υπάρχει μια τουλάχιστον οριζόντια εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ (x_0, f (x_0)) με $x_0 \in (α , β)$.



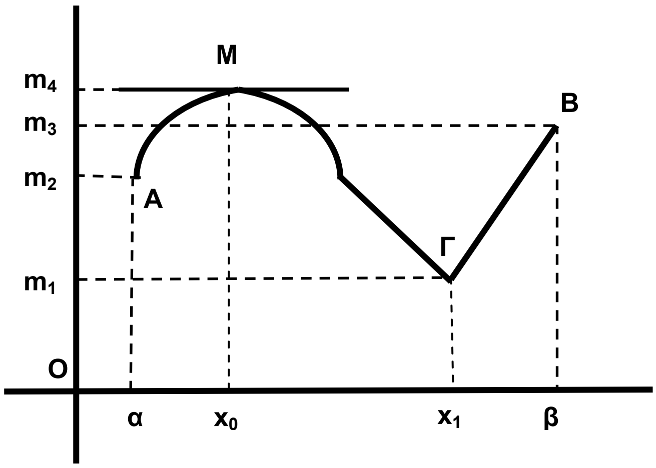
Γεωμετρική Ερμηνεία Θ.Μ.Τ.

Αν η C_f είναι μια συνεχής γραμμή από το A (α , f (α)) στο B (β, f (β)) και η f είναι παραγωγίσιμη στο (α , β), τότε υπάρχει μια τουλάχιστον εφαπτομένη της C_f στο σημείο M (x_0, f (x_0)) που είναι παράλληλη στην ευθεία AB, με $x_0 \in$ (α , β).



Γεωμετρική Ερμηνεία Θ. Fermat.

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 \in$ (α , β) και αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο M (x_0, f (x_0)) είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.



- H f παρουσιάζει τ. μέγιστο στο x_0 την τιμή m_4.
  Το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του (α , β).
  H f είναι παραγωγίσιμη στο x_0
  Άρα ισχύει το Θ. Fermat.

ΣΧΟΛΙΑ

- H f παρουσιάζει τ. ελάχιστο στο x_1 την τιμή m_1.
  Το x_1 είναι εσωτερικό σημείο του (α , β).
  H f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_1 (¨γωνιακό¨ ή σημείο ¨μύτη¨)
  Άρα ΔΕΝ ισχύει το Θ. Fermat
- H f παρουσιάζει τ. ελάχιστο στο α την τιμή m_2.
  Το α δεν είναι εσωτερικό σημείο του (α , β).
  Άρα ΔΕΝ ισχύει το Θ. Fermat
- H f παρουσιάζει τ. μέγιστο στο β την τιμή m_3.
  Το β δεν είναι εσωτερικό σημείο του (α , β).
  Άρα ΔΕΝ ισχύει το Θ. Fermat