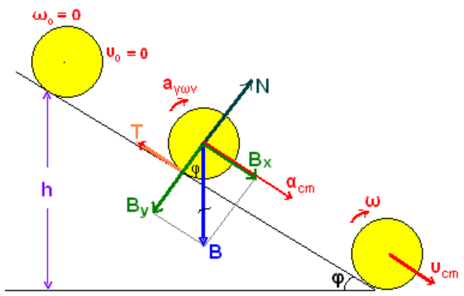
2ο ΘΕΜΑ - ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ερωτήσεις κρίσης

---

1) Έχουμε πάνω στο θρανίο μας δύο κυλίνδρους όμοιους στην όψη, στο μέγεθος και στο βάρος, όμως ο ένας είναι συμπαγής και ο άλλος κούφιος. Να προτείνετε και να εξηγήσετε ένα απλό πείραμα για να τους ξεχωρίσουμε.

Ανασηκώνουμε τη μια άκρη του θρανίου και δημιουργούμε κεκλιμένο επίπεδο. Αφήνουμε ταυτόχρονα από την κορυφή τους κυλίνδρους να κυλίσουν. (Υποθέτουμε ότι κάνουν κύλιση χωρίς ολίσθηση).



Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F = m \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow mg \cdot ημφ - T = m \cdot \alpha_{cm}$ (1)

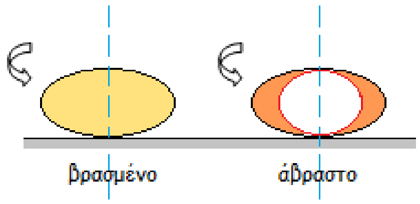
Στροφική κίνηση: $\Sigma \tau = I \cdot a_{γων} \Rightarrow T \cdot R = I \cdot \frac{\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow T = I \cdot \frac{\alpha_{cm}}{R^2}$ (2)

$(1),(2) \Rightarrow mg \cdot ημφ = (m + \frac{I}{R^2}) \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \dfrac{mg \cdot ημφ}{m + \frac{I}{R^2}}$

Ο κούφιος έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας, (διότι η μάζα του κατανέμεται σε μεγαλύτερες αποστάσεις από τον άξονα περιστροφής), άρα θα αποκτήσει μικρότερη μεταφορική επιτάχυνση. Άρα (αφού $s = \frac{1}{2}\alpha_{cm} \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{\alpha_{cm}}}$) αυτός που θα φτάσει πρώτος στη βάση, θα είναι ο συμπαγής.

---

2) Έχουμε πάνω στο τραπέζι δύο αυγά που το ένα είναι ωμό και το άλλο βρασμένο. Να προτείνετε και να εξηγήσετε ένα απλό πείραμα για να τα ξεχωρίσουμε.

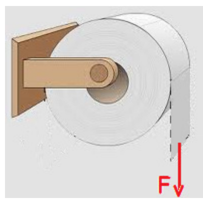


Θα βάλουμε και τα δύο αυγά σε περιστροφή με το χέρι μας, ασκώντας την ίδια ροπή. Στο βρασμένο, το εσωτερικό του είναι στερεό, άρα η μάζα κατανέμεται σε όλο το χώρο. Στο άβραστο το εσωτερικό του είναι σε υγρή κατάσταση, οπότε βάζοντας το σε περιστροφή, η μάζα θα μετατοπισθεί σε όσο το δυνατό μεγαλύτερη απόσταση από τον άξονα (ας το πούμε λόγω της "φυγόκεντρης" δύναμης). Έτσι το άβραστο θα έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας από το βρασμένο (αφού η μάζα του κατανέμεται σε μεγαλύτερες αποστάσεις από τον άξονα περιστροφής). Άρα, (αφού $\Sigma\tau = I \cdot a_{γων}$), το βρασμένο θα αποκτήσει μεγαλύτερη γωνιακή επιτάχυνση και θα στρέφεται πιο γρήγορα.

---

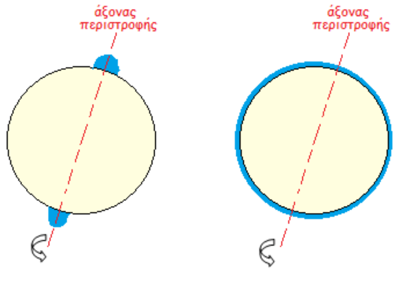
3) Να εξηγήσετε γιατί όταν το ρολό του χαρτιού υγείας είναι γεμάτο μας κόβετε λιγότερο από όσο θέλουμε, ενώ όταν είναι άδειο ξετυλίγεται περισσότερο από όσο θέλουμε.

Όταν το ρολό είναι γεμάτο, έχει μεγάλη ροπή αδράνειας, έτσι χρειάζεται μεγαλύτερη ροπή, άρα και μεγαλύτερη δύναμη, για να περιστραφεί υπερνικώντας τη ροπή της τριβής. Όμως η δύναμη αυτή εύκολα ξεπερνάει τη δύναμη που χρειάζεται για να κοπεί το χαρτί στα διάτρητα σημεία και το χαρτί κόβεται. Αν το ρολό είναι άδειο έχει μικρή ροπή αδράνειας, οπότε η δύναμη που χρειάζεται για να δημιουργήσει τη ροπή περιστροφής είναι μικρότερη από τη δύναμη που χρειάζεται για να κοπεί το χαρτί έτσι ο κύλινδρος γυρίζει γρήγορα χωρίς να κόβεται το χαρτί.



---

4) Αν λιώσουν οι πάγοι στους πόλους, πώς θα μεταβληθεί η κινητική ενέργεια της Γης?



Αν λιώσουν οι πάγοι στους πόλους, η ροπή αδράνειας της Γης θα αυξηθεί, καθώς η ίδια μάζα θα κατανέμεται σε μεγαλύτερες αποστάσεις από τον άξονα περιστροφής. Όμως, η στροφορμή της Γης θα παραμείνει σταθερή, καθώς δεν θα ασκηθούν εξωτερικές ροπές.

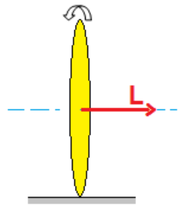
Η κινητική ενέργεια της Γης είναι:

$$K = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}\frac{I^2 \cdot \omega^2}{I} \Rightarrow \mathbf{K = \frac{L^2}{2I}}$$

άρα η κινητική ενέργεια της Γης θα μειωθεί.

---

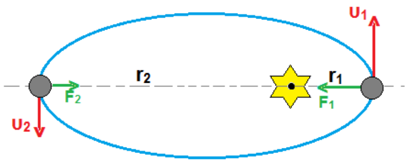
5) Γιατί ένα κέρμα που κυλάει δεν πέφτει, ενώ όταν σταματήσει να κυλά πέφτει?



Όταν το κέρμα κυλά, έχει στροφορμή της οποίας το διάνυσμα είναι κάθετο στο επίπεδό του στο κέντρο του, δηλαδή οριζόντιο. Όσο δεν υπάρχουν εξωτερικές ροπές, η στροφορμή του κέρματος πρέπει να παραμένει σταθερή κατά μέτρο και κατεύθυνση, δηλαδή οριζόντια. Έτσι το κέρμα δεν πέφτει. (Με τον ίδιο τρόπο εξηγείται και η ισορροπία του ποδηλάτου, αλλά έβαλα το κέρμα γιατί στο ποδήλατο παίζουν και άλλα).

---

6) Η τροχιά της Γης γύρω από τον ήλιο είναι ελλειπτική. Στο πιο κοντινό ή στο πιο μακρινό σημείο από τον ήλιο έχει πιο μεγάλη ταχύτητα?



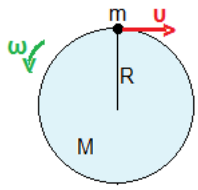
Η ελκτική δύναμη που ασκεί ο ήλιος στη Γη δεν δημιουργεί ροπή, έτσι η στροφορμή της Γης, κατά την περιφορά της γύρω από τον ήλιο, παραμένει σταθερή. (Η Γη μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο).

$L_1 = L_2 \Rightarrow m \cdot \upsilon_1 \cdot r_1 = m \cdot \upsilon_2 \cdot r_2 \Rightarrow \upsilon_1 \cdot r_1 = \upsilon_2 \cdot r_2$ και αφού $r_1 < r_2$ είναι $\upsilon_1 > \upsilon_2$.

Άρα μεγαλύτερη ταχύτητα έχει στο πιο κοντινό σημείο.

---

7) Ένας οριζόντιος δίσκος μπορεί να στρέφεται ελεύθερα γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο του και ένας άνθρωπος βρίσκεται σε ένα σημείο της περιφέρειας του δίσκου. Αρχικά και ο δίσκος και ο άνθρωπος είναι ακίνητοι. Ό άνθρωπος αρχίζει να περπατά με σταθερή ταχύτητα στην περιφέρεια και σταματά όταν ξαναγυρίσει στο σημείο από όπου ξεκίνησε για δεύτερη φορά. Αν ο δίσκος έκανε έναν πλήρη κύκλο, ποιος είναι ο λόγος των μαζών δίσκου και ανθρώπου?

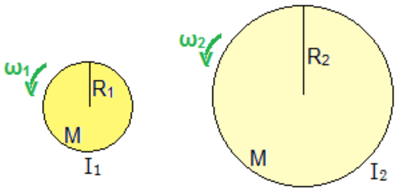


Καθώς ο άνθρωπος κινείται με ταχύτητα υ, ο δίσκος στρέφεται με αντίθετη φορά και με γωνιακή ταχύτητα ω. Στο χρόνο t που κράτησε η κίνηση, ο δίσκος έκανε μια πλήρη περιστροφή, άρα στράφηκε κατά γωνία φ = 2π και η γωνιακή του ταχύτητα (θεωρούμενη σταθερή) ήταν $\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{t}$. Στο χρόνο αυτό ο άνθρωπος έκανε για αυτόν 2 κύκλους, όμως για ακίνητο παρατηρητή έξω από το δίσκο διάνυσε τόξο ίσο με το μήκος ενός κύκλου $s = 2\pi R$ και η ταχύτητά του <u>ως προς τον ακίνητο παρατηρητή</u> ήταν $\upsilon = \frac{s}{t} = \frac{2\pi R}{t}$. Επειδή στο σύστημα δίσκος - άνθρωπος δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές, η ολική στροφορμή διατηρείται σταθερή και αφού αρχικά είναι μηδέν, θα είναι μηδέν και για οποιαδήποτε στιγμή κατά τη διάρκεια της κίνησης:

$$L_{ολ} = 0 \Rightarrow L_{ανθρ} + L_{δισκ} = 0 \Rightarrow m \cdot \upsilon \cdot R - I_{δισκ} \cdot \omega = 0 \Rightarrow m \cdot \frac{2\pi R}{t} \cdot R = \frac{1}{2} M \cdot R^2 \cdot \frac{2\pi}{t} \Rightarrow \mathbf{\frac{M}{m} = 2}$$

---

8) Ένα σφαιρικό άστρο περιστρέφεται γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του. Κάποια στιγμή το άστρο διαστέλλεται και ο όγκος του οκταπλασιάζεται. Τι θα πάθει η κινητική ενέργεια του άστρου?



$$V_2 = 8V_1 \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R_2^3 = 8 \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3 \Rightarrow R_2 = 2R_1$$

$$I_1 = \frac{2}{5} M R_1^2 \quad , \quad I_2 = \frac{2}{5} M R_2^2 \Rightarrow I_2 = \frac{2}{5} M \cdot (2R_1)^2 \Rightarrow I_2 = 4I_1$$

Δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές, άρα $L_1 = L_2 = L =$ σταθ.

$$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \cdot \omega_1^2 = \frac{1}{2} \frac{I_1^2 \cdot \omega_1^2}{I_1} = \frac{L_1^2}{2I_1} = \frac{L^2}{2I_1}$$

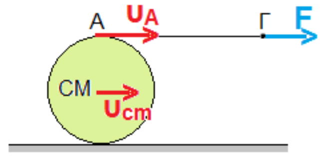
$$K_2 = \frac{1}{2} I_2 \cdot \omega_2^2 = \frac{1}{2} \frac{I_2^2 \cdot \omega_2^2}{I_2} = \frac{L_2^2}{2I_2} = \frac{L^2}{2 \cdot 4I_1} = \frac{K_1}{4}$$

Άρα η κινητική ενέργεια του άστρου υποτετραπλασιάζεται.

---

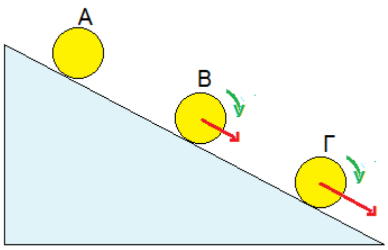
9) Μια τροχαλία βρίσκεται όρθια σε οριζόντιο επίπεδο και γύρω της έχει τυλιχτεί αβαρές σκοινί. Ασκούμε μέσω του σκοινιού σταθερή οριζόντια δύναμη F και το κέντρο μάζας της τροχαλίας μετατοπίζεται κατά x. Πόσο έργο παρήγαγε η δύναμη?

Το ανώτατο σημείο Α της τροχαλίας έχει ταχύτητα διπλάσια από αυτήν του κέντρου μάζας $υ_A = 2υ_{cm}$. Την ίδια ταχύτητα έχουν και όλα τα σημεία του σκοινιού, άρα και το σημείο Γ εφαρμογής της δύναμης F. Έτσι όταν το κέντρο μάζας της τροχαλίας μετατοπίζεται κατά x, το σημείο εφαρμογής της (αφού έχει διπλάσια ταχύτητα) μετατοπίζεται κατά 2x. Άρα το έργο της δύναμης είναι: $W = F\cdot 2x = 2F\cdot x$.



---

10) Ομογενές στερεό σώμα αφήνεται ελεύθερο σε θέση (Α) κεκλιμένου επιπέδου, όπου έχει δυναμική ενέργεια U_A = 280J. Το σώμα κυλά χωρίς να ολισθαίνει. Σε θέση (Β) το σώμα έχει κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής $K_{ΠΒ}$ = 60J και δυναμική ενέργεια U_B = 70J. Σε κατώτερη θέση (Γ) όπου έχει δυναμική ενέργεια $U_Γ$ = 28J να βρεθούν η κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης και η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφικής κίνησης.



Θέση (Α) : $K_A = 0$, $U_A = 280$ J , Άρα $E_{ολ} = 280$ J

Θέση (Β) : $E_{ολ} = U_B + K_{MB} + K_{ΠB}$ ==> $K_{MB} = E_{ολ} - U_B - K_{ΠB}$ ==> $K_{MB} = 150$ J

Για οποιοδήποτε στερεό που κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση, κάθε στιγμή ο λόγος της κινητικής ενέργειας μεταφοράς προς την κινητική ενέργεια περιστροφής είναι:

$$\frac{K_{μετ}}{K_{περ}} = \frac{\frac{1}{2}m\cdot υ_{cm}^2}{\frac{1}{2}I\cdot ω^2} = \frac{m\cdot ω^2\cdot R^2}{I\cdot ω^2} = \frac{m\cdot R^2}{I} = \text{σταθερός} .$$

Από τη θέση (Β) προκύπτει: $\frac{K_{μετ}}{K_{περ}} = \frac{150}{60} = 2{,}5$

Θέση (Γ) : $E_{ολ} = U_Γ + K_{MΓ} + K_{ΠΓ}$ ==> $K_{MΓ} + K_{ΠΓ} = E_{ολ} - U_Γ$ ==> $K_{MΓ} + K_{ΠΓ} = 252$ J (i)

Όμως όπως αποδείχθηκε πιο πάνω: $\frac{K_{MΓ}}{K_{ΠΓ}} = 2{,}5$ (ii)

Η λύση του συστήματος των (i), (ii) δίνει: **$K_{MΓ}$ = 180 J** και **$K_{ΠΓ}$ = 72 J**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΣΕ ΟΛΟΥΣ