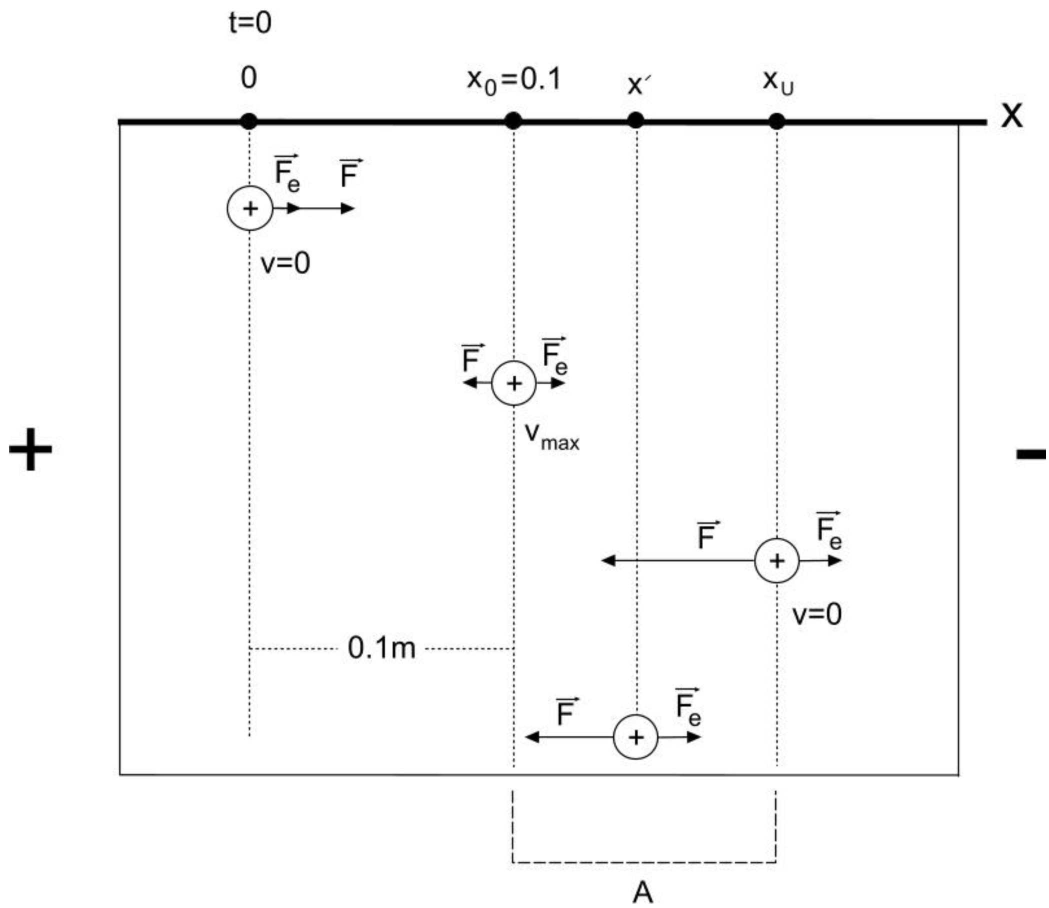
Στην παρακάτω άσκηση, οι τιμές των μεγεθών δίνονται στο SI.

Έστω ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης $\vec{E} = 2 \cdot 10^3$ σε τυχαία θέση του οποίου τοποθετούμε σωματίδιο φορτίου $q = 10^{-3}$ και μάζας $m = 10^{-6}$. Τη στιγμή που αφήνουμε το σωματίδιο να κινηθεί ελεύθερα, του εφαρμόζουμε μια εξωτερική δύναμη $\vec{F}$ η οποία υπακούει το νόμο $\vec{F} = 8 - 100x$, όπου x είναι η μετατόπιση του σωματιδίου από την αρχική θέση στην οποία το τοποθετήσαμε.

1. ΝΔΟ το σωματίδιο θα κινηθεί με ΑΑΤ
2. Να βρεθεί η περίοδος της ταλάντωσης, το πλάτος της, και η μέγιστη ταχύτητα του σωματιδίου
3. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του μέτρου της $\vec{F}$
4. Να γραφεί η εξίσωση κίνησης της ΑΑΤ.

ΛΥΣΗ

Τα αρχικά στάδια κίνησης του σωματιδίου απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα, όπου για ευκολία έχουμε υποθέσει ότι αριστερά βρίσκεται συγκεντρωμένο θετικό φορτίο και δεξιά αρνητικό:



Παρατηρήσεις:

• Η ηλεκτρική δύναμη είναι σταθερή καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης και ισούται με $\vec{F_e} = 2\mathrm{N}$.

• Η εξωτερική δύναμη δεν είναι σταθερή. Από τη θέση 0 μέχρι τη θέση 0.08 έχει φορά προς τον θετικό ημιάξονα ενώ από τη θέση 0.08 και έπειτα έχει αντίθετη φορά. Επίσης, το μέτρο της μεταβάλλεται συνεχώς.

• Υπάρχει κάποιο σημείο (έστω x_0, με $x_0 > 0.08$) όπου η εξωτερική δύναμη θα έχει ίσο μέτρο αλλά αντίθετη φορά από την ηλεκτρική. Στο σημείο αυτό η συνισταμένη των δυνάμεων είναι 0 και έτσι υποπτευόμαστε ότι είναι η θέση ισορροπίας της (υποτιθέμενης) ΑΑΤ. Εύκολα προκύπτει ότι $x_0 = 0.1$.

• Εφόσον η εξωτερική δύναμη μεγαλώνει κατά μέτρο προς τα δεξιά και έχει φορά αντίθετη της κίνησης του σωματιδίου, μοιραία κάποια στιγμή το σωματίδιο θα ακινητοποιηθεί προσωρινά, έστω στη θέση x_U. Η διαφορά $x_U - x_0$ θα ισούται με το πλάτος A της ταλάντωσης. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι δεν ισχύει κατ' ανάγκη $A = x_0 - 0 = 0.1$. Με άλλα λόγια, δεν ξέρουμε αν κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης το σωματίδιο επιστρέφει στην αρχική θέση που το τοποθετήσαμε. Παρ' όλα αυτά, υποψιαζόμαστε (και τελικά έχουμε δίκιο) ότι $A = 0.1$.

1. Έστω τυχαία θέση $x' > 0$.

Αν $x' > x_0 = 0.1$ τότε $\Sigma\vec{F} = 2 + 8 - 100x' = 2 + 8 - 100(0.1 + x' - 0.1) = -100(x' - 0.1)$

Αν $x' < x_0 = 0.1$ τότε $\Sigma\vec{F} = 2 + 8 - 100x' = +8 - 100(0.1 - (0.1 - x')) = -100(x' - 0.1)$

Άρα για κάθε x', $\Sigma\vec{F} = -100(x' - 0.1)$, συνεπώς το σωματίδιο εκτελεί ΑΑΤ **γύρω από το σημείο** $x_0 = 0.1$.

2. Η σταθερά της δύναμης ταλάντωσης είναι $D = k = 100$. Άρα $\omega = 10^4, T = 2\pi \cdot 10^{-4}$.

Από το θεώρημα έργου – κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} W_{0\to x_0} &= \int_0^{0.1} \Sigma\vec{F}dx = \int_0^{0.1} -100(x - 0.1)dx = 0.5 \\ W_{0\to x_0} &= \frac{1}{2}m{v_{\max}}^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_{\max} = 10^3$$

Το έργο της συνισταμένης δύναμης μπορεί εναλλακτικά να υπολογιστεί με βάση τη γραφική παράσταση ΣF – x.

Επίσης, από την ενεργειακή ανάλυση της ΑΑΤ έχουμε:

$$\frac{1}{2}m{v_{\max}}^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = 0.1$$

3. $\left|\vec{F}_{\max}\right| = \left|\vec{F}(x_U)\right| = \left|\vec{F}(0.2)\right| = \left|8 - 20\right| = 12$

4. Εφ' όσον το σωματίδιο εκτελεί ΑΑΤ γύρω από το $x_0 = 0.1$ με πλάτος $A = 0.1$, η εξίσωση κίνησής του θα είναι

$x - 0.1 = 0.1\sin(10^4 t + \varphi)$.

Τη στιγμή $t = 0$ η θέση του είναι η $x = 0$, άρα $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$. Τελικά η εξίσωση κίνησης γράφεται:

$$x = 0.1\left(1 + \sin\left(10^4 t + \frac{3\pi}{2}\right)\right)$$