Γενική περίπτωση ανακύκλωσης

Με τον όρο ανακύκλωση εννοούμε την κίνηση ενός σώματος σε κατακόρυφο επίπεδο σε κυκλική τροχιά. Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιας κίνησης είναι η κίνηση στο roller coaster, η κίνηση του σέρφερ ή του σκέιτερ όταν κάνουν άλματα. Βέβαια έχουμε κι άλλα πολλά παραδείγματα αλλά θα επικεντρωθούμε σε λίγο πιο μαθηματικοποιημένες – μοντελοποιημένες περιπτώσεις.

1. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα μαθηματικό εκκρεμές, δηλαδή ένα αβαρές νήμα πολύ μεγάλου μήκους δεμένο στο ένα άκρο του με ένα σφαιρίδιο. Θα βρούμε την συνθήκη που πρέπει να ισχύει ώστε να έχουμε ασφαλή ανακύκλωση. Αυτή η συνθήκη αναφέρεται στο ανώτερο σημείο της τροχιάς, αλλά θα προχωρήσουμε και λίγο παραπάνω: θα βρούμε ποιά θα πρέπει να είναι η συνθήκη στο κατώτερο σημείο της τροχιά ώστε να κάνει ασφαλή ανακύκλωση.

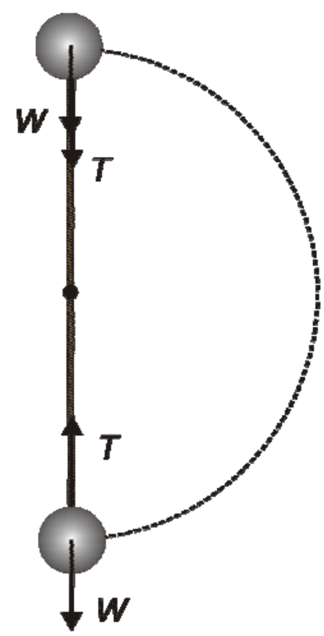
Στο ανώτερο σημείο της τροχιάς ασκούνται σύμφωνα με την φορά του σχήματος: Το βάρος και τάση του νήματος. Η συνισταμένη των δύο αυτών δυνάμεων αφού βρίσκονται στην διεύθυνση της ακτίνας θα δρα ως κεντρομόλος. Έτσι θα έχουμε:

$$\sum F = F_{\kappa\varepsilon\nu} \Rightarrow W + T = F_{\kappa\varepsilon\nu} \Rightarrow T + mg = \frac{mu^2}{R}.$$

Η συνθήκη για την ασφαλή ανακύκλωση στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι το νήμα να παραμένει τεντωμένο, δηλαδή η τάση του νήματος να είναι μη μηδενική. Στην οριακή περίπτωση θα έχουμε T=0, άρα η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$mg = \frac{mu^2}{R} \Rightarrow u^2 = gR \Rightarrow \boxed{u = \sqrt{gR}}.$$

Άρα το σύστημα για να κάνει ασφαλή ανακύκλωση θα πρέπει να έχει ταχύτητα στο ανώτερο σημείο μεγαλύτερη από αυτήν που βρήκαμε, δηλαδή $u > \sqrt{gR}$.



Σχήμα 82: Μαθηματικό εκκρεμές

Αν προχωρήσουμε λίγο περισσότερο, μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα της σφαίρας στην κατώτερη θέση της τροχιάς. Αν χρησιμοποιήσουμε ΘΜΚΕ από την κατώτερη μέχρι την ανώτερη θέση της τροχιάς στην οριακή περίπτωση που μόλις θα κάνει ανακύκλωση (T=0) θα έχουμε:

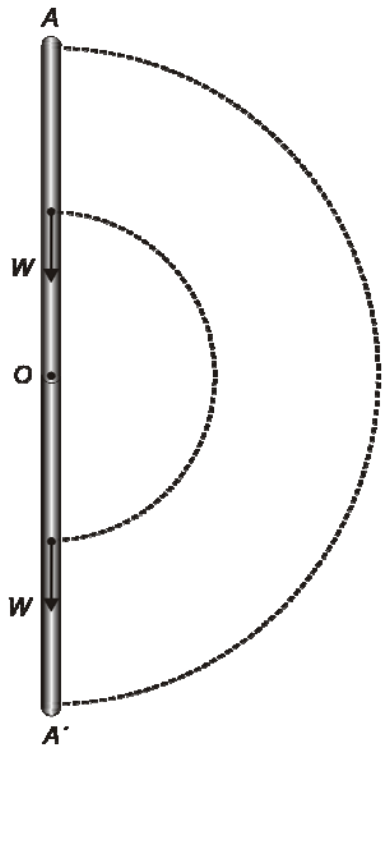
$$K_{\text{ΑΣ}} - K_{\text{ΚΣ}} = W_W + \cancel{W_T} \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}u_{\text{ΑΣ}}^2 - \frac{1}{2}\cancel{m}u_{\text{ΚΣ}}^2 = -\cancel{m}gh \Rightarrow$$

$$u_{\text{ΚΣ}}^2 = u_{\text{ΑΣ}}^2 + 2gh \Rightarrow u_{\text{ΚΣ}}^2 = gR + 2g2R \Rightarrow$$

$$u_{\text{ΚΣ}}^2 = 5gR \Rightarrow \boxed{u_{\text{ΚΣ}} = \sqrt{5gR}}$$

Εδώ θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι πήραμε μόνο την μεταφορική κινητική ενέργεια που είναι απολύτως λογικό αφού το σώμα κάνει μόνο μεταφορική κίνηση.

2. Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε μία αρθρωμένη ράβδο κατά κύριο λόγο και στη συνέχεια οποιοδήποτε σύστημα που βασίζεται στην ράβδο. Έτσι πάλι αναζητούμε τις ταχύτητες ώστε το σώμα να κάνει ασφαλή ανακύκλωση. Σε αυτή την περίπτωση τα πράγματα είναι λίγο διαφορετικά αφού αν η ράβδος φτάσει στην ανώτερη θέση και έχει έστω και λίγη, πολύ μικρή ταχύτητα τότε θα κάνει ασφαλή ανακύκλωση. Έτσι, η ελάχιστη ταχύτητα που μπορεί να έχει το σύστημα στο ανώτερο σημείο είναι $\omega>0$ ή αν θέλουμε οριακά $\omega=0$. Αν θέλουμε την ταχύτητα στο κατώτερο σημείο τότε θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποια ενεργειακή σχέση έστω εδώ την ΑΔΕ:



Σχήμα 82: Ράβδος

$$K_{\text{ΑΣ}} + U_{\text{ΑΣ}} = K_{\text{ΚΣ}} + U_{\text{ΚΣ}} \Rightarrow \frac{1}{2}I\omega_{\text{ΑΣ}}^2 + mg\ell = \frac{1}{2}I\omega_{\text{ΚΣ}}^2 + 0$$

όπου εδώ επιλέχθηκε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο μάζας. Η ροπή αδράνειας της ράβδου δεν είναι η ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας και χρειάζεται θεώρημα Steiner. Θα έχουμε δηλαδή:

$$I = I_{cm} + md^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow ... \Rightarrow I = \frac{m\ell^2}{3}.$$

Έτσι η ενεργειακή σχέση θα γίνει:

$$\cancel{\frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{3}\omega_{\text{ΑΣ}}^2} + \cancel{m}g\cancel{\ell} = \frac{1}{2}\frac{\cancel{m}\ell^{\cancel{2}}}{3}\omega_{\text{ΚΣ}}^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega_{\text{ΚΣ}}^2 = \frac{6g}{\ell}} \Rightarrow \boxed{\omega_{\text{ΚΣ}} = \sqrt{\frac{6g}{\ell}}}$$

3. Σφαίρα ή κύλινδρος η οποία κυλίεται χωρίς ολίσθηση σε κυκλική διαδρομή

Αυτή η περίπτωση είναι και η πιο σύνθετη διότι θα πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν μας τόσο την μεταφορική όσο και την περιστροφική κίνηση της σφαίρας ή του κυλίνδρου. Στο ανώτερο σημείο της τροχιάς οι δυνάμεις που ασκούνται στην σφαίρα είναι το βάρος της και η κάθετη αντίδραση από την διαδρομή. Στην συγκεκριμένη περίπτωση τόσο στην ανώτερη όσο και στην κατώτερη θέση δεν υπάρχει στατική τριβή. Έτσι η συνθήκη που αναζητούμε είναι η σφαίρα ή ο κύλινδρος να έχουν επαφή με την διαδρομή δηλαδή η δύναμη από την διαδρομή να είναι μη μηδενική. Εμείς βέβαια θα θεωρήσουμε ότι στην οριακή περίπτωση η N=0 και θα επιλύσουμε:

$\sum F = F_{κεν} \Rightarrow W + N = F_{κεν} \Rightarrow N + mg = \dfrac{mu^2}{R}$ άρα θα είναι για N=0: $mg = \dfrac{mu^2}{R} \Rightarrow u^2 = gR \Rightarrow \boxed{u = \sqrt{gR}}$. Οι τιμές αυτές βρέθηκαν με την λογική ότι η ακτίνα της σφαίρας ή του κυλίνδρου είναι πολύ μικρή ή σε κάθε περίπτωση πολύ μικρότερη από την ακτίνα της διαδρομής. Στην περίπτωση που αυτή η συνθήκη δεν είναι δυνατόν να ισχύσει οι παραπάνω σχέσεις θα γίνουν:

$$\sum F = F_{κεν} \Rightarrow W + N = F_{κεν} \Rightarrow \cancel{N} + mg = \frac{mu^2}{R-r} \Rightarrow$$

$$mg = \frac{mu^2}{R-r} \Rightarrow u^2 = g\left(R-r\right) \Rightarrow \boxed{u = \sqrt{g\left(R-r\right)}}$$

Όπου r είναι η ακτίνα της σφαίρας.

Η ταχύτητα της σφαίρας στο κατώτερο σημείο μπορεί να βρεθεί από ΘΜΚΕ:

$$K_{Α\Sigma} - K_{Κ\Sigma} = W_W + \cancel{W_T} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mu_{Α\Sigma}^2 + \frac{1}{2}I\,\omega_{Α\Sigma}^2 - \frac{1}{2}mu_{Κ\Sigma}^2 - \frac{1}{2}I\,\omega_{Κ\Sigma}^2 = -mgh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}u_{Α\Sigma}^2 + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{5}\cancel{m}r^2\omega_{Α\Sigma}^2 - \frac{1}{2}\cancel{m}u_{Κ\Sigma}^2 - \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{5}\cancel{m}r^2\omega_{Κ\Sigma}^2 = -\cancel{m}g\,2R \Rightarrow$$

$$\frac{7}{10}u_{Α\Sigma}^2 - \frac{7}{10}u_{Κ\Sigma}^2 = -2gR \Rightarrow u_{Κ\Sigma}^2 = u_{Α\Sigma}^2 + \frac{20}{7}gR \Rightarrow u_{Κ\Sigma}^2 = gR + \frac{20}{7}gR \Rightarrow$$

$$u_{Κ\Sigma}^2 = \frac{27}{7}gR \Rightarrow \boxed{u_{Κ\Sigma} = \sqrt{\frac{27}{7}gR}}$$

Εδώ πάλι είναι το αποτέλεσμα χωρίς τον υπολογισμό του r. Στην περίπτωση μη αμελητέας ακτίνας θα έχουμε:

$$K_{Α\Sigma} - K_{Κ\Sigma} = W_W + \cancel{W_T} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mu_{Α\Sigma}^2 + \frac{1}{2}I\,\omega_{Α\Sigma}^2 - \frac{1}{2}mu_{Κ\Sigma}^2 - \frac{1}{2}I\,\omega_{Κ\Sigma}^2 = -mgh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}u_{Α\Sigma}^2 + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{5}\cancel{m}r^2\omega_{Α\Sigma}^2 - \frac{1}{2}\cancel{m}u_{Κ\Sigma}^2 - \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{5}\cancel{m}r^2\omega_{Κ\Sigma}^2 = -\cancel{m}g\,2(R-r) \Rightarrow$$

$$\frac{7}{10}u_{Α\Sigma}^2 - \frac{7}{10}u_{Κ\Sigma}^2 = -2g\,(R-r) \Rightarrow$$

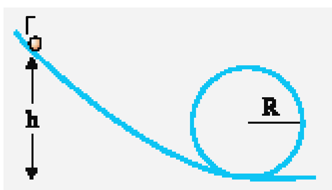
$$u_{Κ\Sigma}^2 = u_{Α\Sigma}^2 + \frac{20}{7}g\,(R-r) \Rightarrow$$

$$u_{Κ\Sigma}^2 = g\,(R-r) + \frac{20}{7}g\,(R-r) \Rightarrow$$

$$u_{Κ\Sigma}^2 = \frac{27}{7}g\,(R-r) \Rightarrow \boxed{u_{Κ\Sigma} = \sqrt{\frac{27}{7}g\,(R-r)}}$$

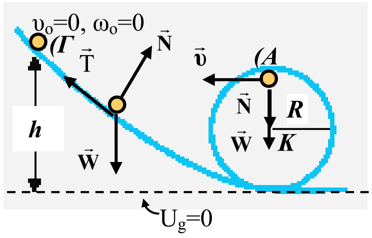
Παράδειγμα 28 (Πρόβλημα 4.69 Σχολικού)

Μια μικρή σφαίρα μάζας m και ακτίνας r αφήνεται από το σημείο Γ πάνω σε οδηγό, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν η κίνηση της σφαίρας γίνεται χωρίς ολίσθηση, ποιο είναι το μικρότερο ύψος h από το οποίο πρέπει να αφεθεί η σφαίρα για να κάνει ανακύκλωση;



Δίνονται: η ακτίνα R=20 cm, η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της $I = \frac{2}{5} m r^2$ και ότι η ακτίνα της σφαίρας είναι πολύ μικρή σε σχέση με την ακτίνα R της στεφάνης.

Απάντηση



Η σφαίρα κάνει σύνθετη κίνηση, μια περιστροφική γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας την και μία μεταφορική σε κυκλική τροχιά. Έστω $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας στο ανώτατο σημείο Α της τροχιάς της και $\vec{\omega}$ η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της σφαίρας, γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της, στο ίδιο σημείο. Αφού η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ισχύει: $\upsilon = \omega r$. Για να μην ολισθαίνει η σφαίρα κατά την κίνησή της, υπάρχει τριβή που είναι στατική και επομένως δεν παράγει συνολικά έργο. Τους λόγους τους έχουμε αναλύσει προηγουμένως. Άρα η μηχανική ενέργεια της σφαίρας, που θεωρείται αμελητέων διαστάσεων (r<<R), κατά την κύλισή της διατηρείται σταθερή. Αν θεωρήσουμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το κατώτερο σημείο της τροχιάς, της διαδρομής. Έτσι αν χρησιμοποιήσουμε την ΑΔΕ από το σημείο Γ μέχρι το σημείο Α θα έχουμε:

$$U_{\Gamma} + 0 + 0 = U_{A} + K_{\Pi(A)} + K_{M(A)} \Rightarrow$$

$$mgh = mg\,2R + \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m \upsilon^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mgh = 2mgR + \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2} m \cancel{r^2}}{5} \frac{\upsilon^2}{\cancel{r^2}} + \frac{1}{2} m\upsilon^2 \Rightarrow$$

$$\cancel{m} g(h-2R) = \cancel{m} \upsilon^2 (\frac{1}{2} + \frac{1}{5}) \Rightarrow g(h-2R) = \frac{7}{10} \upsilon^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{\frac{10g}{7}(h-2R)}}$$

Όμως για τη σφαίρα στο σημείο Α, κατά την ακτινική διεύθυνση ΚΑ – αφού η μεταφορική της κίνηση μέσα στον κυκλικό οδηγό είναι κυκλική – ισχύει:

$$N + mg = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow N = m(\frac{\upsilon^2}{R} - g),$$

όπου Ν η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης επαφής που δέχεται η σφαίρα από τον οδηγό. Για να μη χάσει η σφαίρα την επαφή με τον οδηγό στο Α πρέπει:

$$N \geq 0 \Rightarrow m(\frac{\upsilon^2}{R} - g) \geq 0 \overset{m>0}{\Rightarrow} \frac{\upsilon^2}{R} \geq g \Rightarrow \upsilon^2 \geq gR \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{10g}{7}\left(h - 2R\right) \geq gR \Rightarrow h - 2R \geq \frac{7}{10}R \Rightarrow h \geq \frac{27}{10}R \Rightarrow$$

$$\boxed{h_{\min} = \frac{27}{10}R = 54cm}$$

Παρατήρηση

Σε όλη την διάρκεια της κίνησης υπάρχει η δύναμη της στατικής τριβής της οποίας η φορά βρίσκεται σύμφωνα με όλα αυτά που έχουμε συζητήσει πιο πρίν. Οι μοναδικές θέσεις που δεν υπάρχει δύναμη τριβής είναι η κατώτερη και η ανώτερη θέση της τροχιάς.

Παράδειγμα 29

Μια λεπτή ομογενής ράβδος ΑΒ καρφώνεται στο ένα άκρο της Α και κρέμεται κατακόρυφα έτσι ώστε να μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από αυτό. Η ράβδος έχει μήκος ℓ και αρχικά ισορροπεί. Ένα βλήμα από πλαστελίνη, που έχει την ίδια μάζα με τη ράβδο, εκτοξεύεται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου υ και προσκρούει με το άκρο Β της ράβδου, οπότε και προσκολλάται στη ράβδο. Το σύστημα ράβδος - βλήμα, μετά τη σύγκρουση, αρχίζει να περιστρέφεται με κέντρο το Α.

Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της ταχύτητας υ, ώστε το σύστημα να εκτελέσει ανακύκλωση;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα διερχόμενο από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{M\,\ell^2}{12}$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση

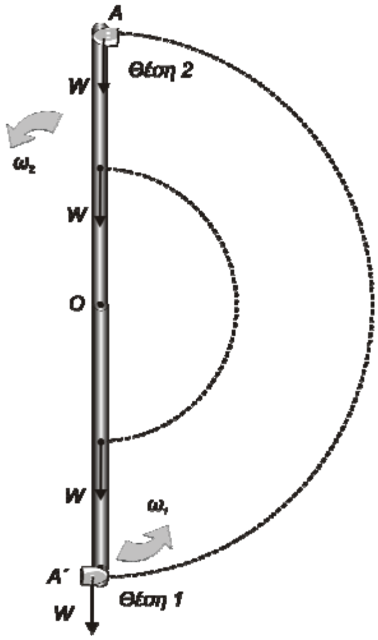
Για να εκτελέσει το σύστημα ανακύκλωση πρέπει στην ανώτατη θέση (θέση 2) να έχει γωνιακή ταχύτητα. Δηλαδή πρέπει $\omega_2 \geq 0$ (5). Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σύστημα και τις θέσεις 1, 2 οπότε έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{\vec{W}_1(B\to B')} + W_{\vec{W}_2(O\to O')} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left(I_1' + I_2'\right)\left(\omega_2^2 - \omega_1^{\,2}\right) = -Mg\,(2\ell) - Mg\,\ell \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3}M\,\ell^2\left(\omega_2^2 - \omega_1^{\,2}\right) = -3\mathrm{M}g\,\ell \Rightarrow \omega_2^2 - \omega_1^{\,2} = -\frac{9}{2}\frac{g}{\ell} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_2^2 = \omega_1^{\,2} - \frac{9g}{2\ell} \Rightarrow \boxed{\omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 - \frac{9g}{2\ell}}} \quad (1)$$

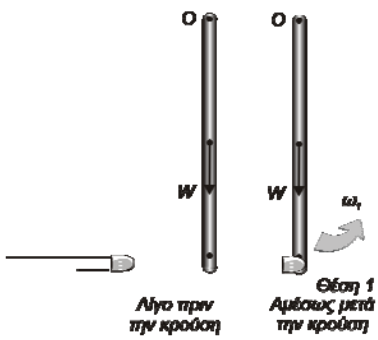


Σχήμα 84

Για να μπορεί να υπάρξει η ρίζα θα πρέπει $\omega_1^2 \geq \dfrac{9g}{2\ell}$. Για λόγους ευκολίας θα πάρουμε την οριακή περίπτωση κατά την οποία $\omega_1^2 = \dfrac{9g}{2\ell}$. Έτσι το ζητούμενο τώρα είναι να βρούμε την γωνιακή ταχύτητα ω_1.

Αν θεωρήσουμε την ομογενή ράβδο και την πλαστελίνη σαν ένα σύστημα, παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει εξωτερική ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής, γιατί οι μοναδικές εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται είναι τα βάρη των σωμάτων τα οποία δεν προκαλούν ροπή. Αρα η στροφορμή του συστήματος κατά την κρούση διατηρείται σταθερή, οπότε:

$$L_{\alpha\rho\chi}^{\sigma\upsilon\sigma\tau} = L_{\tau\varepsilon\lambda}^{\sigma\upsilon\sigma\tau} \quad (2).$$



Σχήμα 85

Όμως, αρχικά το βλήμα, ως προς τον άξονα που διέρχεται από το (Α), έχει στροφορμή λόγω μεταφορικής κίνησης $L_1 = M\,\upsilon\ell$ ενώ η ακίνητη ράβδος δεν έχει στροφορμή, δηλαδή L_2=0.

Άρα $L_{\alpha\rho\chi} = L_1 + L_2 \Rightarrow L_{\alpha\rho\chi} = \mathrm{M}\upsilon\ell \quad (3)$.

Μετά την κρούση η ράβδος με το προσκολλημένο βλήμα αποτελούν σύστημα και η ροπή αδράνειας του συστήματος θα είναι η ροπή αδράνειας της ράβδου συν αυτήν του βλήματος. Δηλαδή η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το Α θα είναι αν εφαρμόσουμε θεώρημα Steiner:

$$I_2' = I_{cm} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow I_2' = \frac{M\,\ell^2}{12} + \frac{M\,\ell^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2' = \frac{4}{12} M\,\ell^2 \Rightarrow I_2' = \frac{M\,\ell^2}{3}$$

Ενώ η ροπή αδράνειας του βλήματος, ως μέρος πια του συστήματος θα είναι: $I_1' = M\,\ell^2$. Άρα η συνολική ροπή αδράνειας του συστήματος θα είναι:

$$I_{o\lambda} = \frac{M\,\ell^2}{3} + M\,\ell^2 = \frac{4M\,\ell^2}{3}$$

Αν ω_1 η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος αμέσως μετά την κρούση, τότε η στροφορμή του θα είναι:

$$L_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{4}{3}\mathrm{M}\ell^2\omega_1 \quad (4)$$

Από την (2) επομένως λόγω των (3),(4) έχουμε:

$$M\,\upsilon\ell = \frac{4}{3}M\,\ell^2\omega_1 \Rightarrow \upsilon = \frac{4}{3}\ell\omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{3\upsilon}{4\ell} \quad (5)$$

Οπότε από την (5) λόγω της (1) έχουμε:

$$\omega_1^2 - \frac{9g}{2\ell} \geq 0 \Rightarrow \omega_1^2 \geq \frac{9g}{2\ell} \Rightarrow \omega \geq 3\sqrt{\frac{g}{2\ell}} \overset{(5)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{3\upsilon}{4\ell} \geq 3\sqrt{\frac{g}{2\ell}} \Rightarrow \upsilon \geq 4L\sqrt{\frac{g}{2\ell}} \Rightarrow \upsilon \geq \sqrt{8g\ell} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon_{\min} = \sqrt{8g\ell}}$$

Στο ίδιο βέβαια αποτέλεσμα θα είχαμε καταλήξει αν χρησιμοποιούσαμε την ισότητα από την αρχή.