Έστω μια συνάρτηση f:$R \to R$ συνεχής
να δείξω ότι η εξίσωση $x = \frac{f(x)}{f^2(x)+1}$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο (-1,1)

Λύση:

$$(f^2(x)+1)\,x - f(x) = 0$$
$$\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ g(x) = (f^2(x)+1)\,x - f(x)$$
$$\eta\ \ g(x)\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ (-1{,}1)\ \acute{\omega}\varsigma\ \acute{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\omega}\nu$$

έχουμε

$$g(-1) = -(f^2(-1)+1) - f(-1)$$

$$g(1) = (f^2(1)+1\,) - f(1)$$

έστω $g(1) > 0$ τότε ίσχυει

$$g(1) = f^2(1) - f(1) + 1 > 0$$

επειδή το τριώνυμο ως προς f(1) έχει Δ<0 δλδ g(1) ομόσυμο του συντελεστή της $f^2(1)$ όμοια έχουμε για για την g(-1) δλδ g(-1)<0 επειδή

$$g(-1) = -f^2(1) - f(-1) - 1$$

Δηλαδή το τριώνυμο ως προς f(-1) έχει Δ<0 αρά το g(-1) όμοσυμο του συντελεστή της $f^2(-1)$

Συνεπώς g(1)g(-1) <0 αρά από θεώρημα Bolzano έχουμε ότι ∃ χ ώστε g(x) = 0