

Έστω όρθιος άνθρωπος πάνω σε το ένα άκρο μιας ελεύθερης βάρκας η οποία επιπλέει σε στάσιμο όγκο νερού. Κάποια στιγμή ο άνθρωπος μετακινείται, με σταθερή ταχύτητα ως προς τη βάρκα, προς το άλλο άκρο της. Να εξηγηθεί γιατί η βάρκα θα μετακινηθεί, να βρεθεί η φορά μετακίνησής της και να βρεθεί η μετατόπισή της συναρτήσει της μάζας m του ανθρώπου, της μάζας της βάρκας M και του μήκους L της βάρκας. Η αντίσταση που προβάλλει το νερό στη βάρκα ας θεωρηθεί αμελητέα.

ΛΥΣΗ

Η κίνηση τόσο του ανθρώπου όσο και της βάρκας μπορεί να υποτεθεί γραμμική.

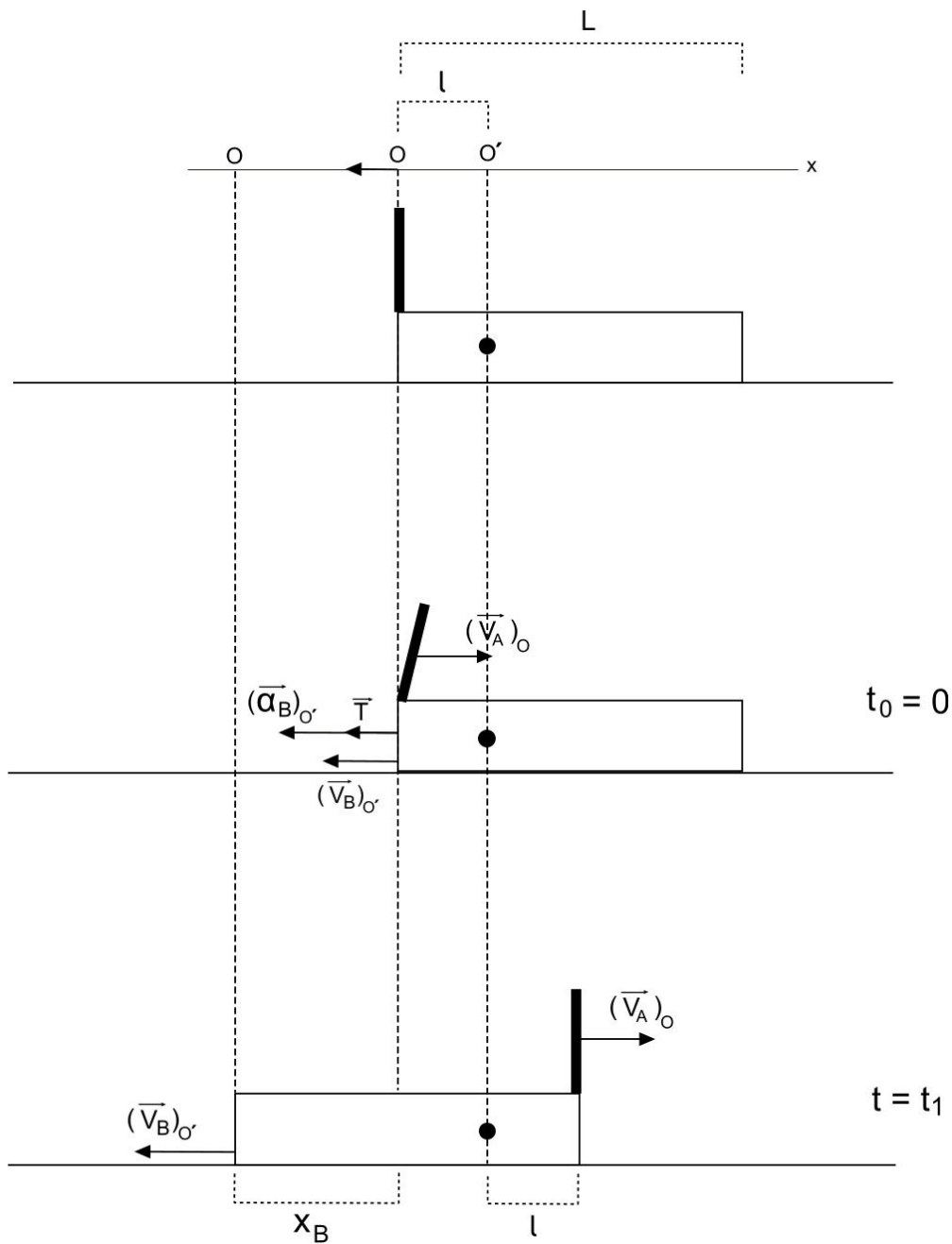
Ας υποθέσουμε ότι ο άνθρωπος βρίσκεται στο αριστερό άκρο της βάρκας και μετακινείται προς τα δεξιά. Σε κάθε βήμα η επιφάνεια των ποδιών του ασκεί μια δύναμη στατικής τριβής πάνω στη βάρκα. Η φορά της τριβής που ασκεί ο άνθρωπος είναι αντίθετη της κίνησης του και συνεπώς η βάρκα θα μετακινηθεί προς τα αριστερά. Αυτό συμβαίνει για τον ίδιο λόγο που κάθε σημείο της επιφάνειας ενός διαδρόμου γυμναστικής κινείται αντίθετα από τη φορά προς την οποία τον περπατάμε. Επίσης, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η τριβή είναι σταθερή (διότι το βάρος του ανθρώπου είναι σταθερό) και ότι ασκείται συνεχόμενα (εάν ο βηματισμός είναι σχετικά γρήγορος).

Εξάλλου, αν διαλέξουμε σαν αρχή του συστήματος συντεταγμένων το κέντρο μάζας του συστήματος άνθρωπου – βάρκας, τότε, επειδή το σύστημα είναι απομονωμένο (δηλ. δεν ασκούνται πάνω του εξωτερικές δυνάμεις), η ταχύτητα του κέντρου μάζας θα παραμείνει σταθερή και ίση με την αρχική του ταχύτητα (μηδέν). Συνεπώς και η ορμή του συστήματος (ως προς το κέντρο μάζας) θα παραμείνει μηδενική καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης. Όμως η ορμή του συστήματος ισούται με το (διανυσματικό) άθροισμα της ορμής του ανθρώπου συν την ορμή της βάρκας, και είναι μηδενική μόνο όταν οι επιμέρους ορμές (και οι αντίστοιχες ταχύτητες) έχουν αντίθετη φορά.

Μέχρι τώρα πρέπει να έχουν γίνει σαφή τα εξής:

1. Ο άνθρωπος κινείται με σταθερή ταχύτητα $\left(\vec{v}_A\right)_O$ ως προς κάθε παρατηρητή O επάνω στη βάρκα.
2. Καθώς της ασκείται σταθερή δύναμη (έστω \vec{T}), η βάρκα κινείται με σταθερή επιτάχυνση ως προς οποιονδήποτε παρατηρητή.
3. Ένας παρατηρητής O' στο κέντρο μάζας του συστήματος είναι ακίνητος ως προς αυτό αλλά βλέπει και τα δύο σώματα να κινούνται έτσι ώστε η συνολική τους ορμή να παραμένει σταθερή και ίση με 0. Επειδή η βάρκα κινείται με σταθερή επιτάχυνση ως προς τον O' και πάνω στη βάρκα κινείται ο άνθρωπος, ο O' βλέπει τον άνθρωπο να κινείται με σταθερή επιτάχυνση και όχι με σταθερή ταχύτητα.

Ας απεικονίσουμε, σε σύμφωνα με τα παραπάνω, κάποια στάδια της κίνησης:



Ας ονομάσουμε:

- $(\vec{v}_A)_{O'}$: την ταχύτητα του ανθρώπου ως προς το O'
- $(\vec{v}_B)_{O'}$: την ταχύτητα του O (της βάρκας) ως προς το O'
- $(\vec{a}_B)_{O'} = \frac{(\vec{v}_B)_{O'}}{t}$: την επιτάχυνση του O ως προς το O'
- x_B : τη μετατόπιση του O ως προς το O'

Αφού το σημείο A κινείται με σταθερή ταχύτητα $(\vec{v}_A)_O$ ως προς το O και το O κινείται με ταχύτητα $(\vec{v}_B)_{O'}$ ως προς το O' , η ταχύτητα του A ως προς το O' πρέπει να είναι $(\vec{v}_A)_{O'} = (\vec{v}_A)_O + (\vec{v}_B)_{O'}$.

Από την παρατήρηση 3 έχουμε ότι:

$$(\vec{p}_A)_{O'} + (\vec{p}_B)_{O'} = \vec{0} \Rightarrow m(\vec{v}_A)_{O'} + M(\vec{v}_B)_{O'} = \vec{0} \Rightarrow m((\vec{v}_A)_O + (\vec{v}_B)_{O'}) + M(\vec{v}_B)_{O'} = \vec{0} \Rightarrow m(\vec{v}_A)_O + (m+M)(\vec{v}_B)_{O'} = \vec{0}$$

Για τη χρονική στιγμή t_1 η παραπάνω γίνεται:

$$m \frac{L}{t_1} + (m + M) \left[t_1 \left(\overrightarrow{a_B} \right)_{O'} \right] = \vec{0} \Rightarrow \left(\overrightarrow{a_B} \right)_{O'} t_1^2 = - \frac{mL}{m + M}$$

Η εξίσωση κίνησης του Ο (της βάρκας) ως προς το Ο' είναι

$$x = -l + \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{a_B} \right)_{O'} t^2$$

Όμως για $t = t_1$, $x = x_B = -(L - 2l)$ και άρα η παραπάνω γίνεται

$$-(L - 2l) = -l + \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{a_B} \right)_{O'} t_1^2 \Rightarrow -(L - 2l) = -l + \frac{1}{2} \left(- \frac{mL}{m + M} \right) \Rightarrow l = \frac{L}{3} - \frac{1}{6} \frac{mL}{m + M}$$

Άρα

$$x_B = -(L - 2l) = -\frac{L}{3} \left(1 + \frac{m}{m + M} \right)$$